ریاضیات گسسته دوازدهم ، بخش پذیري - ۲ سوال -

۲۳- در تقسیم a بر b، خارج قسمت برابر با ۱۹ و باقی‌مانده برابر با ۲۰ است. در تقسیم a بر ۷ نیز باقی‌مانده برابر با ۳ است.

حداقل مقدار a، چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۷

۲) ۸

۳) ۹

۴) ۱۰

آزمون ۲۲ دی

۲۱- اگر b عددی فرد باشد به‌طوری که $a\,|\,b$، آن‌گاه $(۹ab\ ,\ ۱۲a^۲)$ کدام است؟

۱) $۳a^۲$

۲) $۳\,|ab|$

۳) $۹\,|ab|$

۴) $۹a^۲$

آزمون ۲۲ دی

ریاضیات گسسته دوازدهم ، همنهشتي - ۴ سوال -

۲۲- اگر عضوهای مجموعهٔ $A=\{a\in \mathbb{N}\ :\ ۹۹\,|\,a\ \ ,\ ۵۴\,|\,a\}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و دومین عضو این مجموعه

عدد m باشد، آن‌گاه رقم یکان m^m کدام است؟

۱) ۸

۲) ۲

۳) ۴

۴) ۶

آزمون ۲۲ دی

۲۴- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد شش رقمی $\overline{۳۱۰۲۴a}$ بر ۱۱ برابر با ۱ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $\overline{aa۳a}$ بر ۹ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

آزمون ۲۲ دی

۲۵- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $!۱۰ - ۷^{۱۴۰۲} + ۳^{۱۴۰۲}$ بر ۲۱ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۲

۳) ۱

۴) صفر

آزمون ۲۲ دی

۲۶- به ازای چند عدد مانند m از مجموعهٔ $\{۱ , ۲ , ۳ , ... , ۴۰\}$ معادلهٔ $(۲m-۱)x+(m+۱)y=۱۱$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد؟

۱) ۲۳

۲) ۲۷

۳) ۳۳

۴) ۲۵

آزمون ۲۲ دی

ریاضیات گسسته دوازدهم ، گراف و مدل سازي - ۴ سوال -

۲۷- گراف G از اجتماع یک گراف P_n و یک گراف C_n تشکیل شده است. اگر حاصل‌ضرب درجات رأس‌های گراف G برابـر ۲۵۶ باشد، گراف مکمل گراف G چند یال دارد؟

۱) ۴۵

۲) ۴۲

۳) ۳۶

۴) ۳۰

آزمون ۲۲ دی

۲۸- تعداد کل مسیرهای بین دو رأس متمایز در گراف P_n برابر با ۴۵ مسیر است. در این گراف چند مسیر بـه طـول حـداقل ۷ وجـود دارد؟ (برگشت مسیر را مسیر جدید در نظر نگیرید.)

۱) ۶

۲) ۱۰

۳) ۱۵

۴) ۳

آزمون ۲۲ دی

۲۹- گراف سادهٔ G با مجموعه رأس‌های $\{a, b, c, d, e, f\}$ ، ۱۴ یال دارد. این گراف چند دور به طول ۴ دارد؟

۱) ۳۷

۲) ۳۳

۳) ۲۷

۴) ۲۴

آزمون ۲۲ دی

۳۰- اگر از گرافی کامل با p رأس، m یال را حذف کنیم، از مجموع درجات این گراف $3p-11$ واحد کم شده و گرافی ۸- منتظم ایجاد می‌شود. با حذف $2m$ یال از گراف کامل مرتبهٔ p ، مجموع درجات گراف حاصل کدام می‌شود؟

۱) ۹۶

۲) ۷۸

۳) ۸۸

۴) ۶۶

آزمون ۲۲ دی

حسابان دوازدهم ، تابع - ۶ سوال -

۸- نمودار تابع $y = x^2 - 2x + 3$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم، سپس در نمودار به‌دست آمده عرض نقاط را $|k|$ برابر می‌کنیم و نمودار به‌دست آمده را $2|k|$ واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم. اگر نمودار نهایی بر محور طول‌ها مماس باشد، مجموعهٔ مقادیر ممکن k کدام است؟

۱) $(0,\infty)$

۲) $[1,+\infty)$

۳) $\mathbb{R}$

۴) $(0,1)$

آزمون ۲۲ دی

۹- وضعیت یکنوایی نمودار تابع $f(x) = \dfrac{2x-1}{|x|+|x-1|}$ روی $\mathbb{R}$ با حرکت از چپ به راست چگونه است؟

۱) صعودی

۲) نزولی

۳) ابتدا اکیداً صعودی سپس اکیداً نزولی

۴) ابتدا اکیداً نزولی سپس اکیداً صعودی

آزمون ۲۲ دی

۱۰- تابع $f(x) = \log_k(k^x + 1)$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است. مجموعهٔ مقادیر ممکن k کدام است؟

۱) $(0,+\infty)-\{1\}$

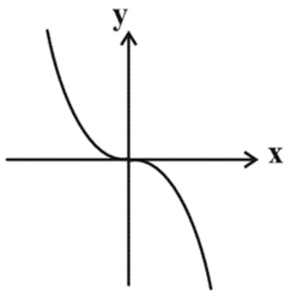
۲) $(0,1)$

۳) $(1,+\infty)$

۴) $(1,2)$

آزمون ۲۲ دی

۱۱- در نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۸}x^۳+\frac{۱}{۴}mx^۲+nx-k$، طول نقاط را نصف می‌کنیم، سپس نمودار به‌دست آمده را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم و در آخر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم. اگر نمودار نهایی به‌صورت زیر باشد، حاصل mnk کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۲}$

۲) $-\frac{۹}{۲}$

۳) $-\frac{۱۵}{۲}$

۴) $-\frac{۲۱}{۲}$

آزمون ۲۲ دی

۱۲- اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه $[-۲,\infty)$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(x)-f(۲x-۱)}{f(x^۲)-f(۳x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲   ۲) ۳

۳) ۴   ۴) ۵

آزمون ۲۲ دی

۱۳- چند جمله‌ای $P(x)=x^۹-۵x+۴$ را بر $x-۱$ تقسیم می‌کنیم. اگر خارج‌قسمت چندجمله‌ای $Q(x)$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-۱$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۵

۳) ۴   ۴) ۱

آزمون ۲۲ دی

حسابان دوازدهم ، مثلثات - ۷ سوال -

۱۴- دوره تناوب تابع $f(x)=\sin^۲ ax-\sin^۴ ax$ برابر $\frac{\pi}{۸}$ است. مقدار $f(\frac{\pi}{۱۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$

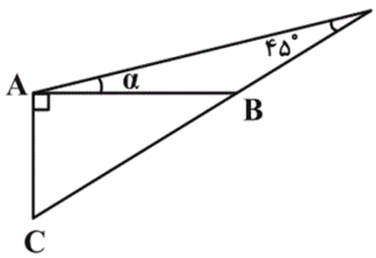
۲) $\frac{۳}{۸}$

۳) $-\frac{۳}{۸}$

۴) $-\frac{۳}{۱۶}$

آزمون ۲۲ دی

۱۵- در شکل مقابل $\tan\alpha=\frac{۱}{۲}$، مقدار $\frac{AB}{AC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

آزمون ۲۲ دی

۱۶- تابع $f(x)=\frac{۱}{\tan ax-\cot ax}$ روی مجموعهٔ $(-m,m)-\{۰\}$ اکیداً صعودی است. اگر بزرگ‌ترین مقدار m برابر $\frac{\pi}{۸}$ باشد، حاصل $f(\frac{۲\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

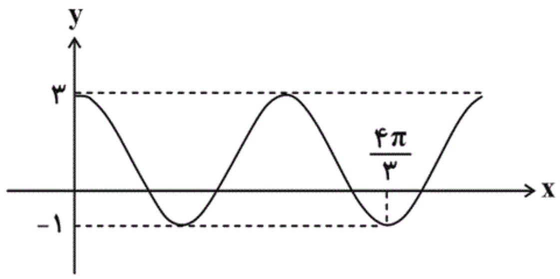
۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

آزمون ۲۲ دی

۱۷- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - b\sin(cx + \frac{\pi}{۴})\cos(cx + \frac{\pi}{۴})$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\frac{b}{۲} + |c|a$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱۳}{۸}$

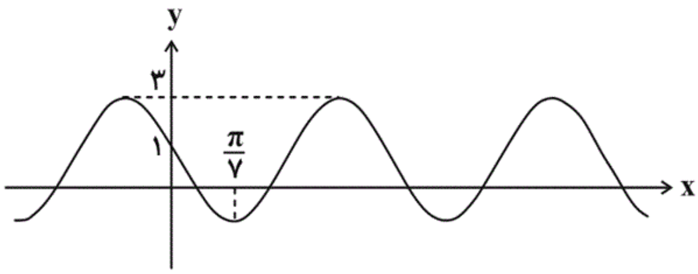
۲) $\frac{۱۹}{۸}$

۳) $-\frac{۷}{۸}$

۴) $\frac{۳}{۸}$

آزمون ۲۲ دی

۱۸- در شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b\cos(cx + \frac{\pi}{۳})$ رسم شده است. مقدار $f(\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟



۱) -۱

۲) -۲

۳) -۳

۴) -۴

آزمون ۲۲ دی

۱۹- اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جواب‌های $\cos^{۲}x-\sin x=\frac{۱}{۴}$ که در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\pi]$ واقع هستند، برابر α است. حاصل

$\tan(\alpha+\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}-۲$

۲) $۱-\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}-\sqrt{۳}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}-۱$

آزمون ۲۲ دی

۲۰- معادلهٔ $\frac{۱}{\sin^{۲}x\cos^{۲}x}+\frac{۲}{\sin x\cos x}-۴=۰$ در بازهٔ $(۰,\frac{۳\pi}{۲})$ چند جواب دارد؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

آزمون ۲۲ دی

حسابان دوازدهم ، حدهاي نامتناهي - حد در بينهايت - ۷ سوال -

۱- تابع $f(x)=x^{۲}-۳x$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to ۳^{+}}\frac{۱}{(f+g)(x)}=-\infty$ باشد، ضابطه تابع g

کدام می‌تواند باشد؟

۱) $x^{۲}-۹x+۱۸$

۲) $x^{۲}-۶x+۹$

۳) $x^{۲}-۱۰x+۲۱$

۴) $x^{۲}-۴x+۳$

آزمون ۲۲ دی

۲- اگر $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{1}{a-2\cos\pi x}=-\infty$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟ $(0<b<2)$

۱) صفر
۲) ۳
۳) ۱
۴) ۱-

آزمون ۲۲ دی

۳- نمودار تابع $f(x)=\dfrac{\tan 2x}{2+\cos x}$ در اطراف مجانب قائم آن در بازهٔ $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ چگونه است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

آزمون ۲۲ دی

۴- نمودار تابع خطی f و g برهم عمودند. اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-g(x)}{f^{-1}(x)+g^{-1}(x)}=-\dfrac{5}{3}$ باشد، شیب خط f کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱-
۲) $\dfrac{2}{3}$
۳) ۲-
۴) $\dfrac{1}{2}$

آزمون ۲۲ دی

۵- فرض کنید $f(x)=\dfrac{3x-|x+1|}{2x+1}$ باشد، حد راست و حد چپ تابع $g(x)=f(\dfrac{|x|-\sqrt[3]{x^2}}{x})$ در نقطهٔ $x=0$ ، به‌ترتیب از راست به چپ برابر کدام است؟

۱) $2,1$
۲) $2,+\infty$
۳) $1,2$
۴) $1,-\infty$

آزمون ۲۲ دی

۶- نمودار تابع $y=\frac{۲x^۲+۳}{ax^۲+bx+۴a}$ فقط دو مجانب موازی محورهای مختصات دارد. اگر نقطه برخورد دو مجانب روی نیمساز ناحیهٔ چهارم باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۵

۳) ۳-

۴) ۵-

آزمون ۲۲ دی

۷- خطوط مجانب‌های افقی و قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x^۲-۲}{ax^۲+bx-۲}$ تنها یک نقطهٔ برخورد دارند که آن هم روی خط $y=x$ قرار دارد. برای $a-b$ چند مقدار متفاوت پیدا می‌شود؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

آزمون ۲۲ دی

هندسه دوازدهم ، آشنايي با مقاطع مخروطي - ۴ سوال -

۳۷- اندازهٔ مماس مشترک خارجی دایرهٔ $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۶=۰$ و دایره‌ای به مرکز نقطهٔ C و شعاع $r=۵$ برابر با $۲\sqrt{۲}$ است. مختصات نقطهٔ C کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(-۲\,,\,۵)$

۲) $(۲\,,\,۳)$

۳) $(-۲\,,\,۳)$

۴) $(۲\,,\,۵)$

آزمون ۲۲ دی

۳۸- خط $۳x+۴y=۲$ دایرهٔ $(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۴$ را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است. معادلهٔ دایره‌ای به مرکز نقطهٔ $C(\frac{۱}{۴},۰)$ که از نقاط A و B می‌گذرد کدام است؟

۱) $۲x^۲+۲y^۲-x-۶=۰$

۲) $x^۲+y^۲-x-۳=۰$

۳) $۲x^۲+۲y^۲-x-۴=۰$

۴) $x^۲+y^۲-x-۲=۰$

آزمون ۲۲ دی

۳۹- خط $۳x+۴y=m$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۴y+۴=۰$ در دو نقطه متقاطعند. حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $m>۶$

۲) $m<۱۶$

۳) $۶<m<۱۶$

۴) $۵<m<۱۵$

آزمون ۲۲ دی

۴۰- دایره‌ای از نقاط $A(۱,-۳)$ و $B(۳,-۱)$ گذشته و بر خط $d: y=-۳$ مماس است. بیشترین فاصلهٔ نقاط این دایره تا محور yها کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۱

۴) $\frac{۳}{۲}$

آزمون ۲۲ دی

هندسه دوازدهم ، ماتریس و کاربردها - ۶ سوال -

۳۱- ماتریس‌های A و B ماتریس‌هایی ۳×۳ و وارون یکدیگرند. اگر ستون اول A به صورت $\begin{bmatrix} ۷ \\ x \\ -۳ \end{bmatrix}$ و سطر اول B به صورت $\begin{bmatrix} ۵ & ۱ & x \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه دترمینان وارون ماتریس $C=\begin{bmatrix} x & x+۳ \\ -x+۱ & x-۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{-۱}{۳}$

۳) $\frac{-۱}{۷}$

۴) $\frac{۱}{۷}$

آزمون ۲۲ دی

۳۲- اگر A ماتریس اسکالر از مرتبهٔ ۲×۲ باشد و داشته باشیم $A^۳ = A^۲ + ۲A$، آن‌گاه حاصل $|A|$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۹

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۳

آزمون ۲۲ دی

۳۳- اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} kx+my=۱ \\ (۲k+۱)x+ny=۱ \end{cases}$ فاقد جواب و دستگاه معادلات $\begin{cases} mx+ny=m-n \\ ۲x+(k+۳)y=m+n \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $-\frac{۶}{۷}$

۲) $\frac{۶}{۵}$

۳) $-\frac{۱۵}{۷}$

۴) $\frac{۱۵}{۸}$

آزمون ۲۲ دی

۳۴- اگر a عدد نامنفی بوده و ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۸^{a^۲-a} & ۴ \\ ۸ & ۲^a \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، مجموع درایه‌های وارون ماتریس $B=\begin{bmatrix} a & ۶ \\ a & ۳ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) $-\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) صفر

آزمون ۲۲ دی

۳۵- اگر درایهٔ $a_{۱۲}$ در ماتریس A دو برابر شود، آن‌گاه درایهٔ $a_{۳۲}$ باید چند برابر شود تا مقدار دترمینان ماتریس تغییر نکند؟

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱) $\frac{۱۷}{۲۱}$

۲) $\frac{۱۹}{۲۱}$

۳) $\frac{۱}{۷}$

۴) $\frac{۳}{۷}$

آزمون ۲۲ دی

۳۶- اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد به‌طوری که $||A|A+A|=۱۹۲$، آن‌گاه $||A|۲A|$ کدام است؟

۱) $۱۲^۴$

۲) ۲×۱۲^۴

۳) ۳×۱۲^۴

۴) ۴×۱۲^۴

آزمون ۲۲ دی

۲۳- **گزینهٔ «۴»** (کیوان دارابی)

طبق فرض داریم:

$$a = b\times 19 + 20 \quad , \quad r < b \Rightarrow 20 < b$$

از طرفی:

$$a = 7k + 3 \Rightarrow a \overset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow 19b + 20 \overset{7}{\equiv} 3$$
$$\Rightarrow 19b \overset{7}{\equiv} -17 \Rightarrow -2b \overset{7}{\equiv} 4 \Rightarrow b \overset{7}{\equiv} -2 \overset{7}{\equiv} 5$$

بنابراین:

$$b \overset{7}{\equiv} 5 \Rightarrow b = 7k' + 5 \quad , \quad 21 \leq b \Rightarrow b_{min} = 7\times 3 + 5 = 26$$

$$a_{min} = b\times 19 + 20 = 26\times 19 + 20 = 514$$
$\Rightarrow$ مجموع ارقام $= 5+1+4 = 10$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴، ۱۵، ۱۹ تا ۲۲)

۱   ۲   ۳   ۴✓

آزمون ۲۲ دی

۲۱- **گزینهٔ «۱»** (کیوان دارابی)

$$(12a^2 , 9ab) = 3|a|(4a , 3b)$$

اما b عددی فرد است پس عامل ۲ را ندارد. در نتیجه 3b نیز عامل ۲ را ندارد. بنابراین عامل ۲ در این ب. م. م بی‌تأثیر است و می‌توانیم آن را کنار بگذاریم:

$$(4a , 3b) = (a , 3b)$$

از طرفی $a|b$ بنابراین $a|3b$ و در نتیجه: $(a , 3b) = |a|$

بنابراین: $(12a^2 , 9ab) = 3|a|\times|a| = 3a^2$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۳، ۱۶ و ۱۷)

۱✓   ۲   ۳   ۴

آزمون ۲۲ دی

۲۲- **گزینهٔ «۴»** (محمد صحت‌کار)

مجموعهٔ A مجموعهٔ مضارب طبیعی مشترک اعداد ۹۹ و ۵۴ است. مجموعهٔ مضارب مشترک دو عدد، مجموعهٔ مضارب ک. م. م آن دو عدد است.

بنابراین باید ابتدا ک. م. م ۹۹ و ۵۴ را به دست آوریم:

$$[99\,,\,54]=[3^2\times 11\,,\,2\times 3^3]=2\times 3^3\times 11=594$$

$$A=\{594\,,\,2\times 594\,,\,3\times 594\,,\,\ldots\}=\{594\,,\,1188\,,\,1782\,,\,\ldots\}$$

دومین عضو این مجموعه عدد ۱۱۸۸ است.

برای یافتن رقم یکان عدد 1188^{1188} باید باقی‌ماندهٔ تقسیم آن را بر ۱۰ بیابیم:

$$1188^{1188}\overset{10}{\equiv}8^{1188}$$

حالا باید توان یعنی ۱۱۸۸ را بر ۴ تقسیم کنیم: $1188\overset{4}{\equiv}0$

بنابراین باید به جای ۱۱۸۸ عدد ۴ را قرار دهیم:

$$1188^{1188}\overset{10}{\equiv}8^{1188}\overset{10}{\equiv}8^4\overset{10}{\equiv}(-2)^4\overset{10}{\equiv}16\overset{10}{\equiv}6$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۲۲ دی

۲۴- **گزینهٔ «۱»** (فرزاد جوادی)

طبق فرض داریم:

$$\overline{31024a}\overset{11}{\equiv}1\Rightarrow a-4+2-0+1-3\overset{11}{\equiv}1$$

$$\Rightarrow a\overset{11}{\equiv}5\Rightarrow a=11k+5\Rightarrow a\in\{\ldots\,,\,-6\,,\,5\,,\,16\,,\,27\,,\ldots\}$$

a یک رقم است پس a فقط می‌تواند ۵ باشد. بنابراین:

$$5535\overset{9}{\equiv}5+5+3+5\overset{9}{\equiv}18\overset{9}{\equiv}0$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

✓۱ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۲ دی

۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(فرزاد جوادی)*

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۳^{۱۴۰۲}+۷^{۱۴۰۲}-۱۰!$ بر ۲۱ را r بنامیم آن‌گاه خواهیم داشت:

$$۳^{۱۴۰۲}+۷^{۱۴۰۲}-۱۰!\overset{۲۱}{\equiv}r$$

با توجه به رابطهٔ $(a+b)^n\equiv a^n+b^n$ (پیمانهٔ ab) خواهیم داشت:

$$۳^{۱۴۰۲}+۷^{۱۴۰۲}\overset{۲۱}{\equiv}(۳+۷)^{۱۴۰۲}\overset{۲۱}{\equiv}۱۰^{۱۴۰۲}$$

حالا باقی‌ماندهٔ تقسیم $۱۰^{۱۴۰۲}$ را یک بار بر ۳ و یک بار بر ۷ پیدا می‌کنیم:

$$۱۰^{۱۴۰۲}\overset{۳}{\equiv}۱^{۱۴۰۲}\overset{۳}{\equiv}۱$$

$$۱۰^{۱۴۰۲}\overset{۷}{\equiv}۳^{۱۴۰۲}$$

برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳^{۱۴۰۲}$ بر ۷ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$۳^۲\overset{۷}{\equiv}۲\Rightarrow ۳^۳\overset{۷}{\equiv}۶\overset{۷}{\equiv}-۱\Rightarrow ۳^۶\overset{۷}{\equiv}۱$$

اگر طرفین این رابطه را به توان ۲۳۳ برسانیم خواهیم داشت:

$$۳^{۱۳۹۸}\overset{۷}{\equiv}۱\Rightarrow ۳^{۱۴۰۲}\overset{۷}{\equiv}۳^۴\overset{۷}{\equiv}۸۱\overset{۷}{\equiv}۴$$

حالا می‌توانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۱۰^{۱۴۰۲}$ بر ۲۱ را به صورت زیر حساب کنیم:

$$\begin{cases}۱۰^{۱۴۰۲}\overset{۳}{\equiv}۱\overset{۳}{\equiv}۴\\ ۱۰^{۱۴۰۲}\overset{۷}{\equiv}۴\end{cases}\Rightarrow ۱۰^{۱۴۰۲}\overset{۲۱}{\equiv}۴$$

از طرفی دیگر در تجزیهٔ عدد $۱۰!$ هم عامل ۳ هم عامل ۷ وجود دارد پس این عدد بر ۲۱ بخش‌پذیر است و بنابراین:

$$۳^{۱۴۰۲}+۷^{۱۴۰۲}-۱۰!\overset{۲۱}{\equiv}۱۰^{۱۴۰۲}-۱۰!\overset{۲۱}{\equiv}۴-۰\overset{۲۱}{\equiv}۴$$

پس $r=۴$ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۲، ۲۹ و ۳۰)

✓ ۱   ۲   ۳   ۴

۲۶- **گزینهٔ «۲»** (مهرداد ملوندی)

شرط وجود جواب معادلهٔ سیالهٔ $(2m-1)x+(m+1)y=11$ آن است که:

$$(2m-1\,,\,m+1)\,|\,11$$

فرض می‌کنیم ب. م. م اعداد $2m-1$ و $m+1$ برابر با d باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} d\,|\,2m-1 \\ d\,|\,m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\,|\,2m-1 \\ d\,|\,2m+2 \end{cases} \Rightarrow d\,|\,3 \Rightarrow d=1 \text{ یا } d=3$$

با توجه به این‌که ۱۱ مضرب ۳ نیست پس باید $(2m-1\,,\,m+1)=1$ باشد.

برای یافتن تعداد اعداد مطلوب مانند m فرض می‌کنیم که ب. م. م اعداد $2m-1$ و $m+1$ برابر با ۳ باشد. در این شرایط خواهیم داشت:

$$3\,|\,m+1 \Rightarrow m+1=3k \Rightarrow m=3k-1$$

برای یافتن تعداد اعدادی از مجموعهٔ $\{1\,,\,2\,,\,3\,,\,...\,,\,40\}$ که به شکل $3k-1$ هستند می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$1 \le 3k-1 \le 40 \Rightarrow 1 \le k \le 13$$

بنابراین به ازای ۱۳ عضو مجموعهٔ $\{1\,,\,2\,,\,3\,,\,...\,,\,40\}$ ب. م. م اعداد $2m-1$ و $m+1$ برابر ۳ است. پس تعداد اعداد مطلوب برابر است با:

$$40-13=27$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

۱   ۲✓   ۳   ۴

۲۷- **گزینهٔ «۳»** (مصطفی دیداری)

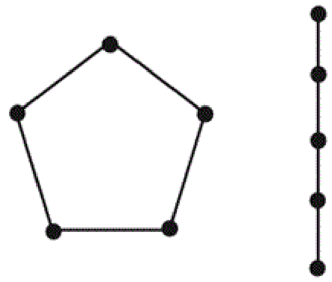
گراف C_n، گرافی ۲ منتظم است. بنابراین درجهٔ هر n رأس برابر با ۲ است و حاصل‌ضرب درجات این رأس‌ها برابر با ۲^n خواهد بود.

هر گراف P_n، دو رأس درجهٔ ۱ و $(n-۲)$ رأس درجهٔ ۲ دارد. پس حاصل‌ضرب درجات این رأس‌ها نیز برابر با $۲^{(n-۲)}$ است.

بنابراین حاصل‌ضرب درجات تمام رأس‌های این گراف برابر با $۲^n \times ۲^{(n-۲)} = ۲^{(۲n-۲)}$ است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$۲^{(۲n-۲)} = ۲۵۶ = ۲^۸ \Rightarrow ۲n-۲ = ۸ \Rightarrow ۲n = ۱۰ \Rightarrow n = ۵$$

مطابق شکل، گراف $C_۵$ دارای ۵ یال و گراف $P_۵$ دارای ۴ یال است. پس این گراف ۱۰ رأس و $۵+۴=۹$ یال دارد.



تعداد یال‌های گراف مکمل این گراف به صورت زیر به دست می‌آید:

$$q(\bar{G}) = q(K_{۱۰}) - q(G) = \frac{۱۰\times۹}{۲} - ۹ = ۴۵ - ۹ = ۳۶$$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۲۸- **گزینهٔ «۱»** (محمد صحت‌کار)

در گراف‌های P_n اگر طول مسیر برابر با r باشد آن‌گاه دو رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\begin{cases} \binom{n}{۲} = \text{تعداد کل مسیرها بین دو رأس متمایز} \\ n-r = r \text{ تعداد مسیرهای به طول} \end{cases}$$

بنابراین: $\binom{n}{۲} = ۴۵ \Rightarrow n = ۱۰$

در گراف $P_{۱۰}$ طول مسیر حداکثر می‌تواند برابر ۹ باشد. بنابراین:

$۳ = ۷ - ۱۰ =$ تعداد مسیرهای طول ۷

$۲ = ۸ - ۱۰ =$ تعداد مسیرهای طول ۸

$۱ = ۹ - ۱۰ =$ تعداد مسیرهای طول ۹

پس تعداد مسیرهای مطلوب برابر است با: $۱ + ۲ + ۳ = ۶$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۲ دی

۲۹- **گزینهٔ «۲»** (محمد صحت‌کار)

این گراف ۶ رأس دارد. اگر گراف G گرافی کامل بود $q(K_6) = \binom{6}{2} = 15$ یال داشت. با توجه به آن‌که گراف G دارای ۱۴ یال است پس این گراف، گرافی کامل بوده که یک یال آن حذف شده است. فرض می‌کنیم که یال حذف شده یال ab باشد. پس باید ابتدا تعداد کل دورهای به طول ۴ در گراف کامل مرتبهٔ ۶ را حساب کنیم و سپس تعداد دورهای به طول ۴ که شامل یال ab هستند را از آن کم کنیم:

تعداد کل دورهای به طول ۴ در گراف کامل مرتبهٔ ۶ $= \binom{6}{4} \times \frac{3!}{2}$

$= 15 \times 3 = 45$

حالا باید تعداد دورهای به طول ۴ شامل یال ab را حساب کنیم. هر دور به طول ۴ شامل یال ab به صورت $abxya$ است که x و y دو رأس از میان رأس‌های c ، d ، e و f هستند. بنابراین:

تعداد دورهای به طول ۴ شامل یال ab در گراف کامل مرتبهٔ ۶

$= \binom{4}{2} \times 2! = 6 \times 2 = 12$

در این محاسبه، $2!$ برای جایگشت‌های رأس‌های x و y در نظر گرفته شده است. بنابراین تعداد دورهای به طول ۴ در گراف G برابر است با:

$45 - 12 = 33$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۱	۲ ✓	۳	۴

۳۰- **گزینهٔ «۴»** (احمدرضا فلاح)

اگر m یال از یک گراف حذف کنیم از مجموع درجات رأس‌های این گراف $2m$ واحد کم می‌شود. بنابراین: $3p-11=2m$

از طرفی دیگر گراف حاصل گرافی ۸- منتظم است. مجموع درجات گراف K_p برابر با $p(p-1)$ و مجموع درجات رأس‌های گراف ۸- منتظم برابر با $8p$ است. بنابراین:

$$p(p-1)-(3p-11)=8p \Rightarrow p^2-p-3p+11=8p$$
$$\Rightarrow p^2-12p+11=0 \Rightarrow (p-1)(p-11)=0$$
$$\Rightarrow p=1 \text{ یا } p=11$$

p نمی‌تواند برابر ۱ باشد پس p برابر با ۱۱ است. بنابراین:

$$3\times 11-11=2m \Rightarrow 2m=22 \Rightarrow m=11$$

حالا باید از گراف کامل مرتبهٔ ۱۱ ، $22=2\times 11$ یال حذف کنیم. تعداد یال‌های گراف کامل مرتبهٔ ۱۱ برابر با $55=\frac{11\times 10}{2}$ است. اگر از این ۵۵ یال، ۲۲ یال را حذف کنیم ۳۳ یال باقی می‌ماند. می‌دانیم که مجموع درجات رأس‌های هر گراف برابر با دو برابر تعداد یال‌هاست. پس حاصل جمع درجات رأس‌های این گراف برابر با $66=2\times 33$ است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ ✓ |

آزمون ۲۲ دی

۸- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

ترتیب تبدیلات را روی ضابطه تابع داده شده انجام می‌دهیم:

$$y=x^2-2x+3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} y=x^2+2x+3$$
$$\xrightarrow{\text{عرض نقاط در } |k|} y=|k|(x^2+2x+3)$$
$$\xrightarrow{\text{۲|k| واحد به سمت پایین}} y=|k|(x^2+2x+3)-2|k|$$
$$=|k|(x^2+2x+1)$$

یعنی ضابطه مربوط به نمودار نهایی $y=|k|(x+1)^2$ است که نمودار این تابع به ازای همهٔ مقادیر k بر محور طول‌ها مماس است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

| ۱ | ۲ | ۳ ✓ | ۴ |

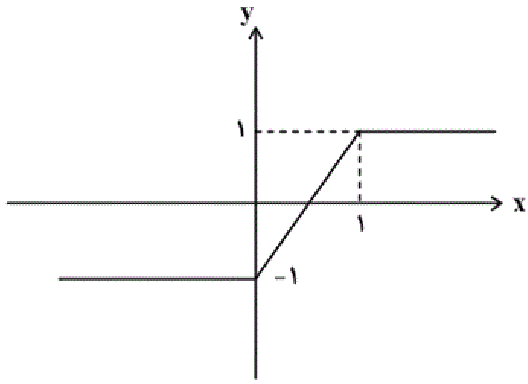
۹- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

دامنه تابع $\mathbb{R}$ است و سعی می‌کنیم ضابطه تابع را ساده‌تر بنویسیم:

$$f(x)=\frac{2x-1}{|x|+|x-1|}\times\frac{|x|-|x-1|}{|x|-|x-1|}$$

$$=\frac{(2x-1)(|x|-|x-1|)}{x^2-(x-1)^2}=|x|-|x-1|$$

نمودار تابع $f(x)=|x|-|x-1|$ را رسم می‌کنیم و می‌بینیم که این نمودار روی $\mathbb{R}$ صعودی است.



(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۲ دی

۱۰- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

توجه کنید که اگر فرض کنیم $g(x)=k^x+1$ و $h(x)=\log_k x$ باشد، $f(x)=(hog)(x)$. اگر $k>1$، هر دو تابع h و g اکیداً صعودی‌اند و در نتیجه f اکیداً صعودی است. اگر $0<k<1$، توابع h و g اکیداً نزولی‌اند و در نتیجه f اکیداً صعودی است. بنابراین اگر $k\in(0,+\infty)-\{1\}$، تابع f اکیداً صعودی است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۲ دی

۱۱- **گزینهٔ «۲»** (کاظم اجلالی)

به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y=f(x)\xrightarrow[\text{تقسیم بر ۲}]{\text{طول نقاط}} y=f(۲x)$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y=f(۲(x-۱))=f(۲x-۲)$$

$$\xrightarrow[\text{به محور طول‌ها}]{\text{قرینه نسبت}} y=-f(۲x-۲)$$

بنابراین ضابطهٔ تابع نهایی به‌صورت زیر است:

$$g(x)=-\frac{۱}{۸}(۲x-۲)^۳-\frac{۱}{۴}m(۲x-۲)^۲-n(۲x-۲)+k$$

$$=-(x-۱)^۳-m(x-۱)^۲-n(۲x-۲)+k$$

$$=-x^۳+(۳-m)x^۲+(۲m-۲n-۳)x+۲n-m+k+۱$$

چون نمودار رسم شده نمودار تابع $y=-x^۳$ است، پس:

$$۳-m=۰\Rightarrow m=۳$$

$$۲m-۲n-۳=۰\xrightarrow{m=۳} n=\frac{۳}{۲}$$

$$۲n-m+k+۱=۰\xrightarrow{m=۳\ ,\ n=\frac{۳}{۲}} k=-۱$$

پس $mnk=-\frac{۹}{۲}$ است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج عبارت زیر رادیکال را حساب می‌کنیم:

$$f(x)-f(۲x-۱)=۰ \Rightarrow f(x)=f(۲x-۱) \Rightarrow x=۲x-۱ \Rightarrow x=۱$$

$$f(x^۲)-f(۳x)=۰ \Rightarrow f(x^۲)=f(۳x) \Rightarrow x^۲=۳x \Rightarrow x=۰,۳$$

و برای تعیین علامت این عبارت‌ها داریم:

$$f(x)-f(۲x-۱)>۰ \Rightarrow f(x)>f(۲x-۱) \Rightarrow x<۲x-۱ \Rightarrow x>۱$$

$$f(x^۲)-f(۳x)>۰ \Rightarrow f(x^۲)>f(۳x) \Rightarrow x^۲<۳x \Rightarrow ۰<x<۳$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت زیر رادیکال به‌صورت زیر است.

x		-۲		۰		۱		۳	
$f(x)-f(۲x-۱)$	//////		$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$f(x^۲)-f(۳x)$	//////		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$
$\dfrac{f(x)-f(۲x-۱)}{f(x^۲)-f(۳x)}$	//////		$+$	ت.ن	$-$	۰	$+$	ت.ن	$-$

پس داریم:

$$\frac{f(۲x)-f(۲x-۱)}{f(x^۲)-f(۳x)} \geq ۰ \Rightarrow -۲ \leq x < ۰ \ \text{یا}\ ۱ \leq x < ۳$$

$$\Rightarrow D_g=[-۲,۰)\cup[۱,۳)$$

پس اعداد صحیحی که در دامنهٔ تابع قرار دارند عبارت‌انداز: $۲,۱,-۱,-۲$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

روش اول: $P(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است؛ زیرا $P(۱)$ برابر صفر است.

$$\Rightarrow P(x)=(x-۱)Q(x) \qquad (*)$$

حال $P(x)$ را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$P(x)=x^{۹}-۵x+۵-۱=x^{۹}-۱-۵(x-۱)$$

$$=(x-۱)(x^{۸}+x^{۷}+...+x+۱)-۵(x-۱)$$

$$=(x-۱)(x^{۸}+x^{۷}+...+x-۴)$$

پس $Q(x)=x^{۸}+x^{۷}+...+x-۴$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بـر $x-۱$ برابر $Q(۱)=۸-۴=۴$ است.

روش دوم:

$$Q(x)=\frac{P(x)}{x-۱}$$

$$\Rightarrow Q(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{P(x)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۹}-۵x+۴}{x-۱}$$

$$\underline{\underline{HOP}}\ \lim_{x\to ۱}\frac{۹x^{۸}-۵}{۱}=۴$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۴- **گزینهٔ «۱»** (علیرضا نراف‌زاده)

لازم است که ابتدا ضابطه تابع را ساده کنیم:

$$f(x)=\sin^{۲}ax(۱-\sin^{۲}ax)=\sin^{۲}ax\cos^{۲}ax$$

$$=\frac{۱}{۴}(۴\sin^{۲}ax\cos^{۲}ax)=\frac{۱}{۴}(\sin^{۲}۲ax)=\frac{۱}{۴}(\frac{۱-\cos ۴ax}{۲})$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۸}(۱-\cos ۴ax)$$

دورهٔ تناوب f از رابطهٔ $T=\frac{۲\pi}{۴|a|}=\frac{\pi}{۲|a|}$ به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۲|a|}=\frac{\pi}{۸}\Rightarrow |a|=۴$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۸}(۱-\cos ۱۶x)$$

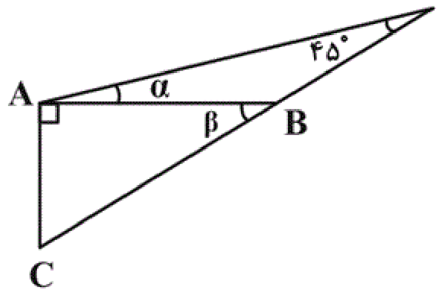
$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{۱}{۸}(۱-\cos\frac{۴\pi}{۳})=\frac{۱}{۸}(۱+\cos\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۸}(\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۱۶}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۲ دی

۱۵- **گزینهٔ «۱»** (علیرضا نراف‌زاده)



β زاویه خارجی محسوب می‌شود و $\beta=\alpha+۴۵^\circ$ ، پس داریم:

$$\frac{AC}{AB}=\tan\beta=\tan(\alpha+۴۵^\circ)=\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}=\frac{۱+(\frac{۱}{۲})}{۱-(\frac{۱}{۲})}=۳$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{۱}{۳}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحهٔ ۴۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۲ دی

۱۶- **گزینهٔ «۲»** (علیرضا نراف‌زاده)

ابتدا دامنه تابع $y=\frac{۱}{\tan x-\cot x}$ و ضابطه ساده شدهٔ آن‌را به‌دست

می‌آوریم:

$$\sin x \neq ٠ \Rightarrow x \neq k\pi$$

$$\cos x \neq ٠ \Rightarrow x \neq (٢k+١)\frac{\pi}{٢}$$

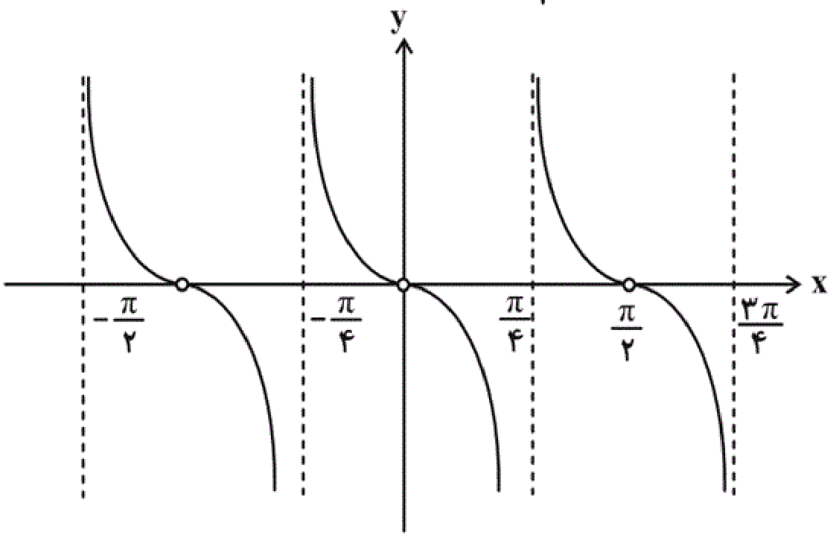
$$\tan x \neq \cot x \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{٢}+\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{٢}, \frac{k\pi}{٢}+\frac{\pi}{۴} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

با استفاده از اتحاد $\cot\theta - \tan\theta = ٢\cot ٢\theta$ ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{١}{-٢\cot ٢ax} = -\frac{١}{٢}\tan ٢ax$$

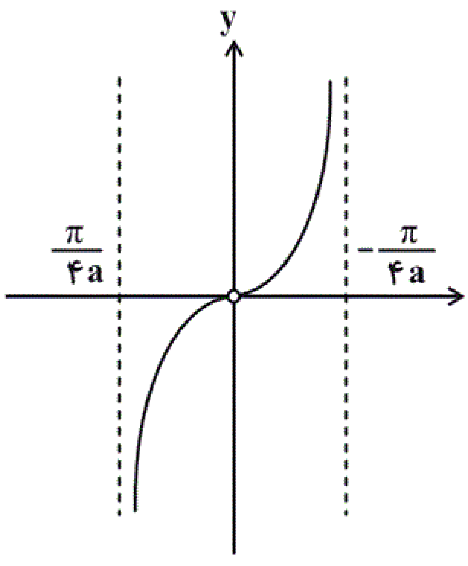
حال نمودار تابع $y = -\frac{١}{٢}\tan ٢x$ مطابق شکل زیر است:



زیرا:

$$\lim_{x \to \frac{k\pi}{٢}+\frac{\pi}{۴}} y = \infty, \quad \lim_{x \to \frac{k\pi}{٢}} y = ٠$$

نمودار تابع f از تقسیم طول نقاط نمودار تابع $y = -\frac{١}{٢}\tan ٢x$ بر a به دست می‌آید و از آنجا که تابع f اکیداً صعودی است، $a < ٠$ است، پس داریم:



پس $\frac{\pi}{۸} = -\frac{\pi}{۴a}$ و در نتیجه $a = -۲$ است.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۲}\tan ۴x$$

$$\Rightarrow f(\frac{۲\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}\tan\frac{۸\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}\tan(۳\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۱	۲ ✓	۳	۴

آزمون ۲۲ دی

۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا نراف‌زاده)*

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a - \frac{b}{۲}\sin(۲cx + \frac{\pi}{۲}) \Rightarrow f(x) = a - \frac{b}{۲}\cos(۲cx)$$

با مقایسه نمودارهای دو تابع f و $y = \cos x$ ، می‌بینیم که $-b > ۰$ یا $b < ۰$ است، اما c می‌تواند هر علامتی داشته‌باشد. حال داریم:

$$\begin{cases} y_{max} = a - \frac{b}{۲} = ۳ \\ y_{min} = a + \frac{b}{۲} = -۱ \end{cases} \Rightarrow a = ۱, b = -۴$$

از طرفی $\frac{۳}{۲}$ برابر دوره تناوب، برابر $\frac{۴\pi}{۳}$ است، پس $T = \frac{۸\pi}{۹}$ است و داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{۲|c|} = \frac{۸\pi}{۹} \Rightarrow |c| = \frac{۹}{۸}$$

$$\Rightarrow a|c| + \frac{b}{۲} = \frac{۹}{۸} - ۲ = -\frac{۷}{۸}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱	۲	۳ ✓	۴

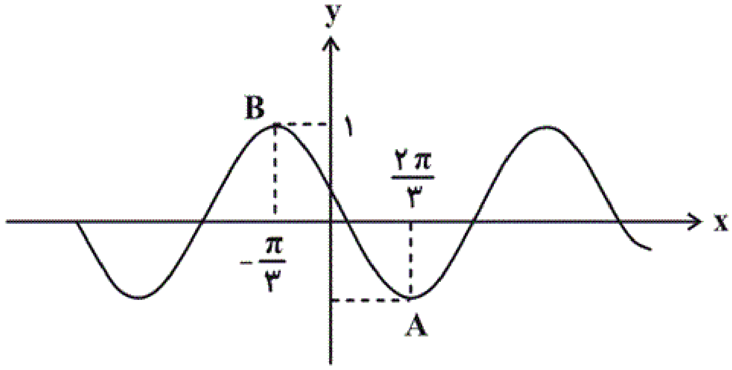
آزمون ۲۲ دی

۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا نراف‌زاده)*

در تابع داده شده $f(۰) = ۱$ و بیش‌ترین مقدار برابر ۳ است:

$$\begin{cases} f(۰) = a + b\cos\frac{\pi}{۳} = ۱ \\ y_{max} = a + |b| = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{b}{۲} = ۱ \\ a + |b| = ۳ \end{cases} \quad (*)$$

برای بحث در مورد پارامترهای b و c ابتدا نمودار تابع $g(x) = \cos(x+\frac{\pi}{۳})$ را رسم می‌کنیم:



با مقایسه نمودارهای دو تابع f و g، می‌توان نتیجه گرفت که نمودار تابع g یا نسبت به هیچ‌کدام از محورهای مختصات قرینه نشده است و یا نسبت به هر دو محور (مبدأ مختصات) قرینه شده است، تا به نمودار تابع f تبدیل شود.

پس در دو حالت بررسی می‌کنیم:

الف) $b < ۰, c < ۰$

یعنی نمودار تابع g نسبت به مبدأ مختصات قرینه شده است، پس طول متناظر نقطه B واقع بر نمودار تابع f برابر $\frac{\pi}{۷}$ است.

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{۳c} = \frac{\pi}{۷} \Rightarrow c = -\frac{۷}{۳}$$

از طرفی داریم:

$$\xrightarrow{*} \begin{cases} a + \frac{b}{۲} = ۱ \\ a - b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a = \frac{۵}{۳}, b = -\frac{۴}{۳}$$

اما کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = \frac{۵}{۳} - \frac{۴}{۳}\cos(\frac{\pi}{۳} - \frac{۷}{۳}x)$ برابر $\frac{۱}{۳}$ است که با نمودار داده شده تطابق ندارد.

ب) $b > ۰, c > ۰$

یعنی نمودار تابع g نسبت به هیچ‌کدام از محورهای مختصات قرینه نشده است، پس طول متناظر نقطهٔ A روی نمودار تابع f برابر $\frac{\pi}{۷}$ است.

$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{۳c} = \frac{\pi}{۷} \Rightarrow c = \frac{۱۴}{۳}$$

و از طرف دیگر داریم:

$$\xrightarrow{(*)} \begin{cases} a + \frac{b}{۲} = ۱ \\ a + b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a = -۱, b = ۴$$

پس نمودار رسم شده مربوط به تابع $f(x) = ۴\cos(\frac{۱۴}{۳}x + \frac{\pi}{۳}) - ۱$

است.

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۲}) = ۴\cos(\frac{۷\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳})-۱ = ۴\cos(\frac{۸\pi}{۳})-۱ = ۴\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۳})-۱$$

$$= -۴\cos\frac{\pi}{۳}-۱ = ۴(-\frac{۱}{۲})-۱ = -۳$$

۴ ۳✓ ۲ ۱

۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا نداف‌زاده)*

ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۱-\sin^۲ x-\sin x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin^۲ x+\sin x-\frac{۳}{۴} = ۰$$

پس داریم:

$$(\sin x+\frac{۳}{۲})(\sin x-\frac{۱}{۲}) = ۰ \xrightarrow{-۱\le \sin x\le ۱} \sin x = \frac{۱}{۲}$$

در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\pi]$ سینوس دو زاویه $x_۱ = \frac{\pi}{۶}$ و $x_۲ = \frac{۵\pi}{۶}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

$$\Rightarrow \alpha = x_۲ - x_۱ = \frac{۲\pi}{۳}$$

و در نهایت داریم:

$$\tan(\alpha+\frac{\pi}{۴}) = \tan(\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱+\tan\frac{۲\pi}{۳}}{۱-\tan\frac{۲\pi}{۳}} = \frac{۱-\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}-۲$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۴ ۳ ۲ ۱✓

آزمون ۲۲ دی

۲۰- گزینهٔ «۳» (علیرضا نداف‌زاده)

از تغییر متغیر $A = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow A^2 + 2A - 4 = 0 \Rightarrow A = -1 \quad \sqrt{5}$$

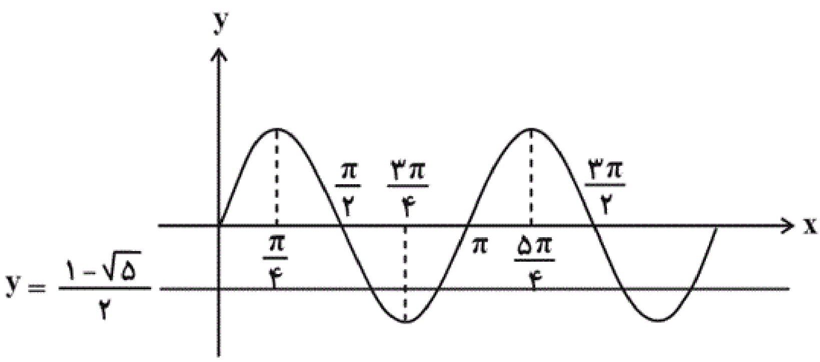
پس داریم:

$$A = \frac{2}{\sin 2x} = -1 \quad \sqrt{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1 \quad \sqrt{5}}{2}$$

که حالت $\sin 2x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ امکان‌پذیر نیست.

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

نمودار تابع $y = \sin 2x$ مطابق شکل زیر است:



مطابق شکل، خط $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ نمودار تابع $y = \sin 2x$ را در بازهٔ $(0 , \dfrac{3\pi}{2})$ در ۲ نقطه قطع می‌کند.

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱- **گزینهٔ «۳»** (حسین شفیع‌زاده)

بهتر است هر چهار ضابطه را برای g در نظر بگیریم و برای تابع $f+g$ حد موردنظر را حساب کنیم:

گزینهٔ «۱»:

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{۱}{(f+g)(x)} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱}{x(x-۳)+(x-۳)(x-۶)}$$

$$= \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱}{(x-۳)(۲x-۶)} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

گزینهٔ «۲»:

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{۱}{(f+g)(x)} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱}{x(x-۳)+(x-۳)^۲}$$

$$= \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱}{(x-۳)(۲x-۳)} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

گزینهٔ «۳»:

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{۱}{(f+g)(x)} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱}{x(x-۳)+(x-۳)(x-۷)}$$

$$= \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱}{(x-۳)(۲x-۷)} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

گزینهٔ «۴»:

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{۱}{(f+g)(x)} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱}{x(x-۳)+(x-۳)(x-۱)}$$

$$= \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱}{(x-۳)(۲x-۱)} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۱ تا ۵۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۲- **گزینهٔ «۴»** (حسین شفیع‌زاده)

حد عبارت $\frac{۱}{a-۲\cos\pi x}$ در هر دو همسایگی چپ و راست $x=b$ برابر $-\infty$ شده است، پس $x=b$ ریشهٔ مضاعف عبارت مخرج است.

$$a-۲\cos\pi b=\circ\Rightarrow\cos\pi b=\frac{a}{۲}$$

وقتی حاصل $\cos$ برابر ۱ شود، جواب مضاعف است:

$$\Rightarrow\frac{a}{۲}=\ \ ۱\Rightarrow a=\ \ ۲$$

اما این نکته مهم است که عبارت مخرج در همسایگی $x=b$ باید منفی باشد، یعنی حالتی باشد که $a<۲\cos\pi x$ باشد $(a=-۲)$ و زمانی رخ می‌دهد که $\cos\pi x$ در مینیمم خودش باشد که در بازه $(\circ,\pi b)=(\circ,۲\pi)$ عبارت $\cos x$ در $x=\pi$ مینیمم می‌شود.

$$\Rightarrow\pi b=\pi\Rightarrow b=۱$$

$$\Rightarrow a+b=-۱$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۱ تا ۵۴)

۴✓	۳	۲	۱

آزمون ۲۲ دی

۳- **گزینهٔ «۴»** (حسین شفیع‌زاده)

در ضابطهٔ تابع f، عبارت $۲+\cos x$ بزرگ‌تر از ۱ است، پس ریشه ندارد. این یعنی مجانب‌های قائم نمودار تابع f فقط مربوط به مجانب‌های نمودار تابع $y=\tan ۲x$ است.

$$۲x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x\neq\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ تنها مجانب نمودار تابع $y=\tan ۲x$، خط $x=\frac{۳\pi}{۴}$ است. از آن‌جا که عبارت $۲+\cos x$ مثبت است. وضعیت نمودار تابع f در همسایگی این خط، همان وضعیت نمودار تابع $y=\tan ۲x$ در همسایگی خط است. در نتیجه گزینهٔ «۴» درست است.

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۴✓	۳	۲	۱

آزمون ۲۲ دی

۴- **گزینهٔ «۳»** (حسین شفیع‌زاده)

ضـــابطه تـــابع f را $f(x)=mx+h$ و در نتیجـــه ضـــابطه تـــابع g را $g(x)=-\frac{1}{m}x+h'$ در نظر می‌گیریم. پس داریم:

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{m}x-\frac{h}{m}\ ,\ g^{-1}(x)=-mx+mh'$$

و حال این ضابطه‌ها را در عبارت داده شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-g(x)}{f^{-1}(x)+g^{-1}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{mx+h-(-\frac{1}{m}x+h')}{\frac{1}{m}x-\frac{h}{m}-mx+mh'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m+\frac{1}{m})x}{(\frac{1}{m}-m)x}=\frac{m+\frac{1}{m}}{\frac{1}{m}-m}=\frac{m^2+1}{1-m^2}=-\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 2m^2=8\Rightarrow m=\ \ 2$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۵- **گزینهٔ «۳»** (حسین شفیع‌زاده)

$$\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}f(\frac{-x-\sqrt[3]{x^2}}{x})=\lim_{x\to 0^-}f(-1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-(x+1)}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}f(\frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x})=\lim_{x\to 0^+}f(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})$$

$$=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+(x+1)}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{2x}=2$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۶- گزینهٔ «۴» (حسین شفیع‌زاده)

تابع داده شده، اگر بخواهد دو خط مجانب موازی محورهای مختصات داشته‌باشد، باید یک مجانب افقی و یک مجانب قائم داشته‌باشد، زیرا عبارت صورت ریشه ندارد. پس اگر نمودار تابع فقط یک مجانب قائم داشته‌باشد، عبارت مخرج باید ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Rightarrow \Delta = b^۲ - ۱۶a^۲ = ۰ \Rightarrow b = \quad ۴a$$

$$\Rightarrow y = \frac{۲x^۲ + ۳}{ax^۲ \quad ۴ax + ۴a} = \frac{۲x^۲ + ۳}{a(x \quad ۲)^۲}$$

محل تقاطع خطوط مجانب روی نیمساز ربع چهارم است، یعنی ریشه مخرج مقداری مثبت است. پس ضابطه با علامت منفی درست است.

$$\Rightarrow y = \frac{۲x^۲ + ۳}{a(x - ۲)^۲}$$

خط $x = ۲$ مجانب قائم نمودار است و باید خط $y = -۲$ مجانب افقی آن باشد:

$$\Rightarrow \lim_{x \to \quad \infty} \frac{۲x^۲ + ۳}{a(x - ۲)^۲} = \lim_{x \to \quad \infty} \frac{۲x^۲}{ax^۲} = \frac{۲}{a} = -۲ \Rightarrow a = -۱$$

$$\xrightarrow{b = -۴a} b = ۴ \Rightarrow a - b = -۵$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸ و ۶۷ تا ۶۹)

۱ ۲ ۳ $\boxed{۴}$ ✓

۷- **گزینهٔ «۲»** (حسین شفیع‌زاده)

نمودار تابع f فقط یک مجانب افقی و یک مجانب قائم دارد و از آنجا که برخلاف سؤال قبلی، عبارت صورت ریشه دارد، دو حالت زیر امکان‌پذیر است:

الف) مخرج، ریشهٔ مضاعف دارد:

$\Delta = b^۲ + ۸a = ۰$ ی مخرج

در این حالت ریشهٔ مضاعف $x_۰ = -\frac{b}{۲a}$ است. همچنین معادله خط مجانب افقی نمودار تابع $y = \frac{۲}{a}$ است. در نتیجه از آنجا که نقطه تقاطع روی خط $y = x$ است باید داشته باشیم:

$$-\frac{b}{۲a} = \frac{۲}{a} \Rightarrow b = -۴ \xrightarrow{\Delta=۰} ۱۶ + ۸a = ۰ \Rightarrow a = -۲$$

در این حالت $a - b = ۲$ است.

ب) عبارت دو ریشه دارد که یکی از ریشه‌های آن با یکی از ریشه‌های صورت مشترک است. چون ریشه‌های عبارت صورت $x = \pm ۱$ هستند، عبارت مخرج را می‌توانیم به صورت‌های زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} ax^۲ + bx - ۲ = (ax+۲)(x-۱) \\ \text{یا} \\ ax^۲ + bx - ۲ = (ax-۲)(x+۱) \end{cases}$$

در این ضابطه‌ها به ترتیب $x = -\frac{۲}{a}$ و $x = \frac{۲}{a}$ خط مجانب قائم نمودار تابع است و در نتیجه نقطهٔ تقاطع خطوط مجانب $(-\frac{۲}{a}, \frac{۲}{a})$ و $(\frac{۲}{a}, \frac{۲}{a})$ است که چون نقطهٔ تقاطع روی خط $y = x$ قرار دارد، حالت امکان‌پذیر $(\frac{۲}{a}, \frac{۲}{a})$ است و داریم:

$$ax^۲ + bx - ۲ = (ax-۲)(x+۱) = ax^۲ + (a-۲)x - ۲$$

$$\Rightarrow b = a - ۲ \Rightarrow a - b = ۲$$

در نهایت فقط یک مقدار برای $a - b$ وجود دارد.

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸ و ۶۷ تا ۶۹)

$\boxed{۴}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۲}$✓ $\boxed{۱}$

۳۷- گزینهٔ «۴» (محمد صحت‌کار)

اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره از رابطهٔ $TT' = \sqrt{d^{۲} - (r - r')^{۲}}$ به دست می‌آید که در آن d فاصلهٔ مراکز دو دایره و r و r' اندازهٔ شعاع‌های دو دایره است.

مرکز دایره به معادلهٔ $x^{۲} + y^{۲} - ۶x - ۲y + ۶ = ۰$ نقطهٔ $C'(۳ , ۱)$ است. اندازهٔ شعاع این دایره برابر است با:

$$r' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶ + ۴ - ۲۴} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶} = ۲$$

بنابراین:

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (۵ - ۲)^{۲}} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow d^{۲} - ۹ = ۸$$
$$\Rightarrow d^{۲} = ۱۷ \Rightarrow d = \sqrt{۱۷}$$

پس فاصلهٔ مراکز دو دایره برابر با $\sqrt{۱۷}$ است. برای یافتن مختصات نقطهٔ C باید همهٔ گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینهٔ «۱»: فاصلهٔ نقطهٔ $(۵ , -۲)$ از نقطهٔ $C'(۳ , ۱)$ برابر است با:

$$\sqrt{۲۵ + ۱۶} = \sqrt{۴۱}$$

گزینهٔ «۲»: فاصلهٔ نقطهٔ $(۳ , ۲)$ از نقطهٔ $C'(۳ , ۱)$ برابر است با:

$$\sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$$

گزینهٔ «۳»: فاصلهٔ نقطهٔ $(۳ , -۲)$ از نقطهٔ $C'(۳ , ۱)$ برابر است با:

$$\sqrt{۲۵ + ۴} = \sqrt{۲۹}$$

گزینهٔ «۴»: فاصلهٔ نقطهٔ $(۵ , ۲)$ از نقطهٔ $C'(۳ , ۱)$ برابر است با:

$$\sqrt{۱ + ۱۶} = \sqrt{۱۷}$$

پس نقطهٔ مطلوب نقطهٔ $C(۲ , ۵)$ است.

۱ ۲ ۳ ۴✓

۳۸- **گزینهٔ «۱»** (هومن عقیلی)

ابتدا باید اندازهٔ وتر AB را حساب کنیم. اگر از مرکز دایرهٔ $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ یعنی نقطهٔ $O(1,1)$ خطی عمود بر وتر AB رسم کنیم تا در نقطهٔ H این وتر را قطع کند آن‌گاه خواهیم داشت:

$$AH^2=r^2-OH^2$$

اندازهٔ پاره‌خط OH برابر با فاصلهٔ نقطهٔ $O(1,1)$ از خط $3x+4y-2=0$ است:

$$OH=\frac{|3+4-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{5}{5}=1$$

اندازهٔ شعاع دایرهٔ $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ برابر با ۲ است. بنابراین:

$$AH^2=r^2-OH^2=4-1=3\Rightarrow AH=\sqrt{3}\Rightarrow AB=2\sqrt{3}$$

حالا باید معادلهٔ دایره‌ای را بیابیم که مرکزش نقطهٔ $C(\frac{1}{4},0)$ است و بر خط $3x+4y-2=0$ وتر AB به طول $2\sqrt{3}$ را جدا می‌کند. برای این کار باید اندازهٔ شعاع این دایره را حساب کنیم. اگر اندازهٔ شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر با R باشد، آن‌گاه:

$$R^2=AH^2+CH^2$$

اندازهٔ پاره‌خط CH برابر با فاصلهٔ نقطهٔ $C(\frac{1}{4},0)$ از خط $3x+4y-2=0$ است:

$$CH=\frac{|\frac{3}{4}+0-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{\frac{5}{4}}{5}=\frac{1}{4}\Rightarrow R^2=(\sqrt{3})^2+(\frac{1}{4})^2=\frac{49}{16}$$

بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$(x-\frac{1}{4})^2+y^2=\frac{49}{16}\Rightarrow x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}+y^2=\frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow 16x^2-8x+1+16y^2=49\Rightarrow 16x^2+16y^2-8x-48=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-x-6=0$$

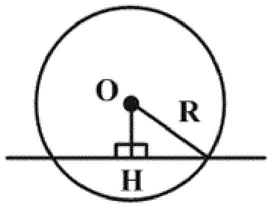
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۵)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۳۹- **گزینهٔ «۳»** (هومن عقیلی)

خط و دایره متقاطعند یعنی: $OH < R$؛ مختصات مرکز دایره می‌شود

$O(-\frac{a}{2}=1\ ,\ -\frac{b}{2}=2)$ و شعاع دایره برابر است با:



$$R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=1$$

OH فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $3x+4y-m=0$ است که می‌شود:

$$OH=\frac{|3+8-m|}{\sqrt{9+16}}$$

$$OH<R\Rightarrow\frac{|11-m|}{5}<1\Rightarrow|11-m|<5$$

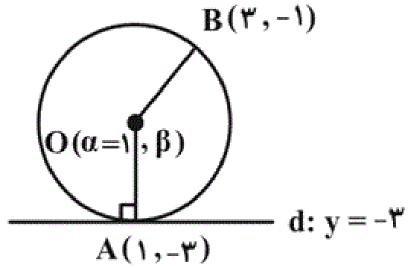
$$\Rightarrow -5<11-m<5\Rightarrow 6<m<16$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۴۰- گزینهٔ «۲» (احمدرضا فلاح)

نقطهٔ $A(1, -3)$ روی خط $d: y = -3$ قرار دارد. بدیهی است مختصات مرکز دایره به صورت $O(\alpha = 1, \beta)$ است. از طرفی $|OA| = |OB|$ و داریم:



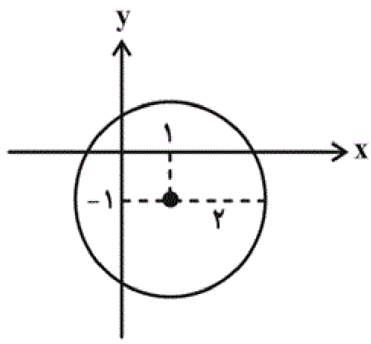
$$\sqrt{(1-1)^2 + (\beta+3)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (\beta+1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \beta^2 + 6\beta + 9 = 4 + \beta^2 + 2\beta + 1$$

$$\Rightarrow 4\beta = -4 \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow O(1, -1)$$

$$R = |OA| = \sqrt{(1-1)^2 + (-3+1)^2} = 2$$

مطابق شکل بیشترین فاصلهٔ محیط این دایره تا محور yها برابر ۳ واحد می‌باشد.



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۶)

$\boxed{1}$ $\checkmark\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

۳۱- **گزینهٔ «۴»** (محمد صحت‌کار)

ماتریس‌های A و B وارون یکدیگرند بنابراین:

$$AB = BA = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ **درایهٔ سطر اول ستون اول ماتریس** BA $\Rightarrow$

$$= \begin{bmatrix} x & 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ x \\ -3 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow 7x + x - 15 = 1$$

$$\Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |C| = 2 - (-5) = 7$$

$$|C^{-1}| = \frac{1}{|C|} = \frac{1}{7}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲، ۲۳ و ۳۱)

۱	۲	۳	۴ ✓

۳۲- **گزینهٔ «۲»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

می‌دانیم ماتریس اسکالر مضربی از ماتریس واحد است پس $A = kI$ و داریم:

$$A^3 = k^3 I \quad , \quad A^2 = k^2 I$$

$$\Rightarrow k^3 I = k^2 I + 2kI \Rightarrow \underbrace{k^3 - k^2 - 2k}_{k(k-2)(k+1)} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow |A| = 0 \\ k = -1 \Rightarrow |A| = 1 \\ k = 2 \Rightarrow |A| = 4 \end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۲ و ۲۷)

۱	۲ ✓	۳	۴

-۳۳ گزینهٔ «۱» (مهرداد ملوندی)

دستگاه معادلات $\begin{cases} kx+my=1 \\ (2k+1)x+ny=1 \end{cases}$ فاقد جواب است، پس:

$$\frac{k}{2k+1}=\frac{m}{n}\neq\frac{1}{1} \qquad (1)$$

از طرفی دستگاه معادلات $\begin{cases} mx+ny=m-n \\ 2x+(k+3)y=m+n \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد، پس:

$$\frac{m}{2}=\frac{n}{k+3}=\frac{m-n}{m+n} \qquad (2) \qquad \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{2}{k+3} \qquad (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(3)} \frac{k}{2k+1}=\frac{2}{k+3} \Rightarrow k^2+3k=4k+2$$

$$\Rightarrow k^2-k-2=0 \Rightarrow (k-2)(k+1)=0 \Rightarrow k=2,-1$$

به ازای $k=-1$ ، رابطهٔ (۱) برقرار نیست، پس $k=2$ و داریم:

$$\xrightarrow{(2)} \overbrace{\frac{m}{2}=\frac{n}{5}}^{n=\frac{5}{2}m}=\frac{m-n}{m+n}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}=\frac{m-\frac{5}{2}m}{m+\frac{5}{2}m}=\frac{-\frac{3}{2}m}{\frac{7}{2}m}=-\frac{3}{7} \Rightarrow m=-\frac{6}{7}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

$\boxed{1}$✓ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

-۳۴ گزینهٔ «۳» (اسحاق اسفندیار)

ماتریس A وارون‌پذیر نیست، پس:

$$|A|=0 \Rightarrow 2^{3(a^2-a)}\times 2^a-2^3\times 2^2=0 \Rightarrow 2^{3a^2-2a}=2^5$$

$$3a^2-2a=5 \Rightarrow a=-1 \;,\quad a=\frac{5}{3} \xrightarrow{a\geq 0} a=\frac{5}{3}$$

$$B=\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 6 \\ \frac{5}{3} & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

B^{-1} مجموع درایه‌های $=-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$✓ $\boxed{4}$

۳۵- **گزینهٔ «۲»** (کیوان دارابی)

اگر ماتریس جدید را B بنامیم، آن‌گاه $b_{12} = 2a_{12} = 2\times 2 = 4$ و $b_{32} = ma_{32} = 3m$. بنابراین:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3m & 1 \end{bmatrix}$$

حال $|A| = |B|$؛ برای این منظور کافی است فقط اختلاف دو دترمینان را محاسبه کرده و برابر با صفر قرار دهیم:

$$|B| - |A| = 0$$

$$\Rightarrow (4-2)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (3m-3)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 7(3m-3) = 0 \Rightarrow 21m - 19 = 0 \Rightarrow m = \frac{19}{21}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۳۶- **گزینهٔ «۲»** (کیوان دارابی)

مطابق فرض داریم:

$$||A|A + A| = 192 \Rightarrow |(|A|+1)A| = 192$$

$$\Rightarrow (|A|+1)^3 \times |A| = 192 = 4^3 \times 3 \Rightarrow |A| = 3$$

$$\Rightarrow ||2A|A| = |2A|^3 |A| = (2^3|A|)^3 |A|$$

$$= 2^9 |A|^4 = 2^9 \times 3^4 = (2^2\times 3)^4 \times 2 = 12^4 \times 2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴