ریاضیات گسسته دوازدهم ، ترکیبیات (شمارش) - ۴ سوال - دبیر ناصر قراچی

۷۷- حروف کلمهٔ «مماشات» را به چند طریق می‌توان در یک ردیف با ۸ خانه قرار داد؟ (دو تا از خانه‌ها خالی می‌مانند.)

۱) $8!$
۲) $7!$
۳) $\frac{8!}{4}$
۴) $\frac{7!}{4}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۷۸- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی دستگاه معادلات زیر کدام است؟

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3^2 + x_4 + x_5 = 11 \end{cases}$$

۱) ۷۸
۲) ۸۴
۳) ۹۰
۴) ۹۶

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۷۹- گل‌فروشی تمام حالت‌های ممکن دسته گل‌های ۷ شاخه‌ای از ۴ نوع گل را درست کرده است. دسته گلی به تصادف انتخاب می‌کنیم، با کدام احتمال از همه انواع گل‌ها در دسته گل وجود دارد؟

۱) $\frac{1}{6}$
۲) $\frac{3}{5}$
۳) $\frac{4}{7}$
۴) $\frac{3}{10}$

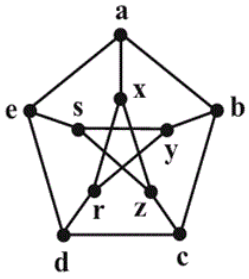
آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۸۰- چند عدد طبیعی ۴ رقمی وجود دارد که همهٔ ارقام آن فرد بوده و مجموع ارقام آن برابر با ۱۲ باشد؟

۱) ۴۲
۲) ۲۸
۳) ۳۵
۴) ۵۶

ریاضیات گسسته دوازدهم ، گراف و مدل سازي - ۳ سوال - دبیر ناصر قراچی

۷۱- گراف زیر چند ۷- مجموعه شامل رأس a دارد؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۷۲- در گراف G با مجموعه رأس‌های $V = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷\}$، مجموعه $D = \{۱ , ۲ , ۳\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. می‌دانیم G رأس تنها ندارد، در این صورت: (الف) مجموعهٔ $C = \{۱ , ۲\}$، مجموعه احاطه‌گر ..... ؛ (ب) مجموعهٔ $E = \{۴ , ۵ , ۶ , ۷\}$ مجموعه احاطه‌گر ..... .

۱) است- است

۲) است- نیست

۳) نیست- است

۴) نیست- نیست

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۷۳- تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر دو عضوی گراف $\bar{C}_۶$ کدام است؟

۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۲

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

ریاضیات گسسته دوازدهم ، شمارش ،بدون شمارش - ۳ سوال - دبیر ناصر قراچی

۷۴- چند عدد طبیعی سه رقمی مضرب ۵ با ارقام متمایز وجود دارد که مجموع ارقام آن عددی فرد باشد؟

۱) ۵۶

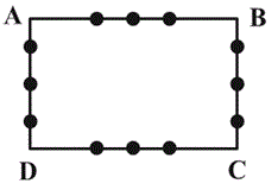
۲) ۶۰

۳) ۶۸

۴) ۷۲

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۷۵- ۱۲ نقطه مطابق شکل روی اضلاع یک مستطیل قرار دارند. چند مثلث با رئوس این نقاط می‌توان ساخت که هیچ دو رأسی روی یک ضلع مستطیل نباشند؟



۱) ۲۲۰

۲) ۱۰۸

۳) ۸۱

۴) ۱۴۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۷۶- به چند طریق می‌توان سه عدد از مجموعهٔ $A = \{۱ , ۲ , ... , ۱۲\}$ انتخاب کرد طوری که مجموع آن‌ها بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۷۶

۲) ۶۴

۳) ۳۶

۴) ۱۲

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

حسابان دوازدهم ، مشتق - ۵ سوال - دبیر ناصر قراچی

۱- تابع $y = |x+۱|$ در کدام نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) $x = -۱$

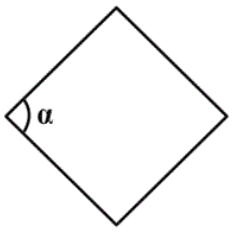
۲) $x = ۱$

۳) $x = ۰$

۴) $x = -۲$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۳- طول ضلع لوزی زیر برابر ۲ است. آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت آن نسبت به α وقتی $\alpha = \frac{۲\pi}{۳}$ کدام است؟



۱) -۱

۲) ۱

۳) ۲

۴) -۲

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۴- مشتق تابع $f(x)=\frac{x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}+۳}{x+\frac{۱}{x}}$ در $x=۲$ کدام است؟

۱) ۰/۶۳
۲) ۰/۶۴
۳) ۰/۶۵
۴) ۰/۶۶

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۵- تابع $f(x)=(ax+b\sqrt{۲x}+۲)[۳x-۲]$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر است. حاصل $a-۲b$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) -۳
۲) ۵
۳) -۴
۴) صفر

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۶- اگر $\lim_{x\to ۰}\frac{f(۱-x)-g(۱-x)}{x+x^{۲}}=۲$ باشد، مشتق تابع $y=f(۲x)-g(۲x)$ در $x=\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) -۲
۳) ۴
۴) -۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

حسابان دوازدهم ، کاربردهاي مشتق - ۵ سوال - دبیر ناصر قراچی

۷- تابع $y=x\sqrt[۳]{x^{۲}}-۵\sqrt[۳]{x}$ در محدودهٔ xهای مثبت چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۸- برد تابع $f(x)=\frac{x^{۴}}{۴}+\frac{x^{۳}}{۳}-x^{۲}$ با دامنهٔ $[۲ , -۲]$ بازهٔ $[a , b]$ است. حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۴
۲) $\frac{۱۶}{۳}$
۳) $\frac{۱۱}{۳}$
۴) ۶

www.kanoon.ir

۹- سیمی به طول ℓ را به قطاعی از یک دایره تبدیل می‌کنیم. بیشترین مساحت قطاع چند برابر $\ell^۲$ است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$

۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۰- مجموع مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\sin^۲ x+\cos x+m$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ برابر $\frac{۱۳}{۴}$ است. مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۲- وضعیت اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)=\begin{cases}۱-x^۲ & ;\ |x|\le ۱\\ x & ;\ |x|>۱\end{cases}$ کدام است؟

۱) فقط ماکزیمم نسبی دارد. ۲) فقط مینیمم نسبی دارد.

۳) یک ماکزیمم و یک مینیمم نسبی دارد. ۴) اکسترمم نسبی ندارد.

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

هندسه دوازدهم ، آشنایي با مقاطع مخروطي - ۸ سوال - دبیر ناصر قراچی

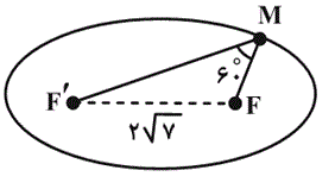
۳۱- چند مثلث مانند ABC می‌توان رسم کرد به‌طوری که $BC=۱۲$ و ارتفاع $AH=۹$ و محیط مثلث برابر ۳۲ باشد؟

۱) هیچ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۳۲- در شکل زیر، F و F' کانون‌های بیضی و M نقطه‌ای واقع بر بیضی است. اگر $MF' = ۳MF$ ، $FF' = ۲\sqrt{۷}$ و $F\hat{M}F' = ۶۰^\circ$ باشند، خروج از مرکز بیضی چقدر است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۷}}{۳}$

۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۴}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۳۳- در یک بیضی، A یکی از دو سر قطر بزرگ و B یکی از دو سر قطر کوچک و F کانون نزدیک به A است. اگر $AB = ۴$ و $AF = ۱$ باشند، فاصلهٔ کانونی بیضی چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۲} - ۲$

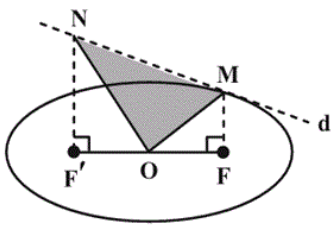
۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) $۶\sqrt{۲} - ۴$

۴) $۲\sqrt{۳}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۳۴- در بیضی شکل زیر، خط d در M بر منحنی مماس است و F و F' کانون‌های بیضی هستند. نقطهٔ O مرکز بیضی، $MF \perp FF'$ و $F'N$ موازی با FM رسم شده است. اگر طول قطرهای بیضی برابر ۸ و $۲\sqrt{۷}$ باشند، آن‌گاه مساحت مثلث OMN چقدر است؟



۱) ۱۸

۲) ۲۰

۳) ۱۲

۴) ۱۵

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۳۵- مرکز دایره $x^۲+y^۲-۲x=۲$، بر کانون سهمی $(y+b)^۲=۲(x+a)$ منطبق است. معادلهٔ خط هادی سهمی کدام است؟

۱) $x=-\frac{۱}{۲}$

۲) $y=-\frac{۱}{۲}$

۳) $x=۰$

۴) $y=۰$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۳۶- به ازای کدام مقدار k، خط هادی سهمی $۲y^۲-x+۴y=-k$ برابر $x=-\frac{۱}{۸}$ است؟

۱) ۲

۲) -۲

۳) ۴

۴) -۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۳۷- در آینهٔ سهموی به معادلهٔ $x^۲=۴y$ پرتو نوری به معادلهٔ $x=۲$ به داخل آینه می‌تابد، عرض از مبدأ پرتو بازتاب کدام است؟

۱) ۲

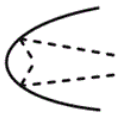
۲) ۱

۳) صفر

۴) محور yها را قطع نمی‌کند.

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۳۸- اگر پرتوهای نوری از نقطهٔ $M(۱,-۱)$ بر بدنهٔ آینه‌ای یک سهمی به معادلهٔ $y^۲=۴x$ بتابد، کدام گزینه پرتوهای تابشی را به درستی رسم کرده است؟

۱) 

۲)

۳)

۴)

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

هندسه دوازدهم ، بردارها - ۲ سوال - دبیر ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۳۹- می‌دانیم خطی که از دو نقطهٔ $A(a , ۲ , ۴)$ و $B(۱, b , c)$ می‌گذرد موازی یکی از محورهای دستگاه $\mathbb{R}^۳$ بـوده و نقطـهٔ M روی

این خط به فاصلهٔ ۳ از مبدأ مختصات قرار دارد. مجموع مختصات نقطهٔ M کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵

۲) -۴

۳) ۳

۴) -۲

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۴۰- وجوه یک مکعب مستطیل قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x = ۱$، $x = ۳$ ، $y = ۱$ ، $y = ۴$ ، $z = -۲$ و $z = ۲$ است. طول قطر

مکعب مستطیل و معادلهٔ یکی از یال‌هایی که به موازات محور yها است، به ترتیب کدام‌اند؟

۱) $\sqrt{۲۹}$ ، $\begin{cases} x = ۲ \\ z = ۱ \end{cases}$

۲) $\sqrt{۱۳}$ ، $\begin{cases} x = ۳ \\ z = -۲ \end{cases}$

۳) $\sqrt{۱۳}$ ، $\begin{cases} x = ۱ \\ z = ۲ \end{cases}$

۴) $\sqrt{۲۹}$ ، $\begin{cases} x = ۱ \\ z = -۲ \end{cases}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۷۷- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

اگر ۶ حرف کلمهٔ «مماشات» و ۲ جای خالی را با حرف O نمایش دهیم باید جایگشت حروف {م ، م ، ا ، ا ، ش ، ت ، O ، O} را حساب کنیم که تعداد آن برابر $\frac{8!}{2!2!2!} = 7!$ خواهد بود.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۷۸- **گزینهٔ «۴»** *(فرزاد جوادی)*

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 = 5$ برابر است با:

$$\binom{5+2-1}{2-1} = \binom{6}{1} = 6$$

حال با در نظر گرفتن $x_1 + x_2 = 5$ در معادلهٔ دوم، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_3^2 + x_4 + x_5 = 6$ را حساب می‌کنیم. چون x_3 متغیر جهش یافته (دارای توان ۲) می‌باشد برای x_3 مقادیر ممکن را در نظر گرفته و تعداد جواب‌های هر یک از معادلات به دست آمده را می‌شماریم:

$$x_3 = 0 \Rightarrow x_4 + x_5 = 6 \Rightarrow \binom{6+2-1}{2-1} = 7$$

$$x_3 = 1 \Rightarrow x_4 + x_5 = 5 \Rightarrow \binom{5+2-1}{2-1} = 6$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow x_4 + x_5 = 2 \Rightarrow \binom{2+2-1}{2-1} = \binom{3}{1} = 3$$

$x_3 = 3 \Rightarrow x_4 + x_5 = -3 \Rightarrow$ جواب ندارد.

$\Rightarrow$ تعداد کل جواب‌های دستگاه $= 6 \times (7+6+3) = 6 \times 16 = 96$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۷۹- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی دیداری)*

تعداد گل‌های نوع اول تا چهارم را به ترتیب x_1 تا x_4 می‌گیریم.

$$S: \quad \text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ } (x_1+x_2+x_3+x_4=7) \quad = \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3}$$

$$A: \quad \text{تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ } (x_1+x_2+x_3+x_4=7) \quad = \binom{7-1}{4-1} = \binom{6}{3}$$

$$P(A) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}}{\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}} = \frac{5\times4}{5\times3\times8} = \frac{1}{6}$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۸۰- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

$$N=\overline{abcd}\Rightarrow a+b+c+d=۱۲$$

a ، b ، c و d فرد هستند، بنابراین هیچ کدام نمی‌توانند صفر باشند و دیگر نگران صفر شدن a نیستیم.

$$\begin{cases} a=۲x_۱+۱ \\ b=۲x_۲+۱ \\ c=۲x_۳+۱ \\ d=۲x_۴+۱ \end{cases}\Rightarrow ۲x_۱+۱+۲x_۲+۱+۲x_۳+۱+۲x_۴+۱=۱۲$$

$$\Rightarrow ۲(x_۱+x_۲+x_۳+x_۴)=۸\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۴$$

از طرفی می‌دانیم $a\geq ۱$ ، $b\geq ۱$ ، $c\geq ۱$ و $d\geq ۱$، بنابراین $x_۱\geq ۰$ ، $x_۲\geq ۰$، $x_۳\geq ۰$ و $x_۴\geq ۰$. در نتیجه:

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله}=\binom{۴+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۷}{۳}=۳۵$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۷۱- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

در این گراف $\gamma=۳$ و ۳ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم شامل رأس a وجود دارد.

$$\{a,r,z\}\ ,\ \{a,y,c\}\ ,\ \{a,s,d\}$$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۷۲- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

چون مجموعهٔ احاطه گر $D = \{۱ , ۲ , ۳\}$، مینیمال است، بنابراین اگر عضوی از آن حذف شود، دیگر احاطه‌گر نخواهد بود. بنابراین مجموعهٔ $C = \{۱ , ۲\}$ احاطه‌گر نیست. اما متمم مجموعهٔ $D = \{۱ , ۲ , ۳\}$، احاطه‌گر است، یعنی مجموعهٔ $E = \{۴ , ۵ , ۶ , ۷\}$ احاطه‌گر است، زیرا گراف رأس تنها ندارد و حالا که رئوس ۱ ، ۲ و ۳ گراف را احاطه کرده‌اند، پس رأس‌های ۴ ، ۵ ، ۶ و ۷ هر کدام لااقل با یکی از رأس‌های ۱ ، ۲ و ۳ مجاور هستند.

نکته: در یک گراف که رأس تنها ندارد، مجموعهٔ متمم هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، خود مجموعه‌ای احاطه‌گر است.

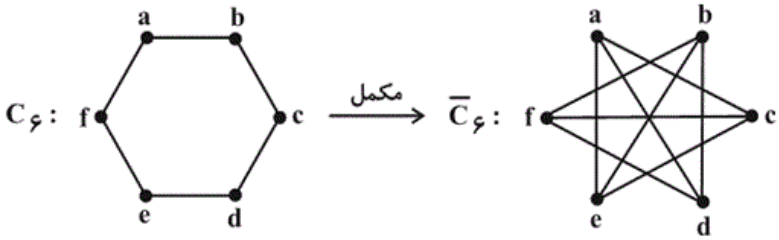
(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۷۳- **گزینهٔ «۲»** *(فرزاد جوادی)*



مطابق شکل، برای گراف $\overline{C}_6$ ، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم (که دو عضوی نیز هستند)، عبارتند از:

$$\begin{cases} \{a , b\} , \{a , d\} , \{a , f\} \\ \{c , d\} , \{c , f\} , \{c , b\} \\ \{e , f\} , \{e , b\} , \{e , d\} \end{cases}$$

پس ۹ مجموعه احاطه‌گر دو عضوی برای $\overline{C}_6$ وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

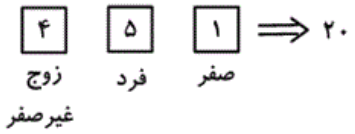
آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

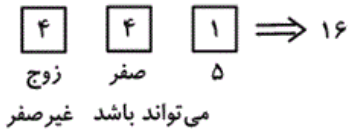
۷۴- **گزینهٔ «۳»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

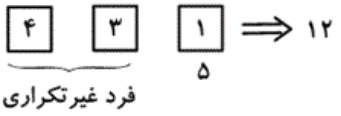
رقم یکان می‌تواند صفر یا ۵ باشد:

(الف) رقم یکان صفر باشد؛ در این صورت برای این‌که مجموع ارقام، عـددی فرد باشد، باید از ارقام باقی‌مانده یکی زوج و دیگری فرد باشد:



(ب) رقم یکان ۵ باشد؛ دو رقم دیگر یا هر دو زوج یا هر دو فرد هستند:





⇒ جواب کل = ۶۸

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۷۵- **گزینهٔ «۲»** (مصطفی دیداری)

سه رأس مثلث باید از سه ضلع مختلف مستطیل انتخاب شود. پـس ابتـدا بـه $\binom{۴}{۳}$ **روش، سه ضلع انتخاب کرده و سپس از هر کدام یـک رأس انتخـاب می‌کنیم. پس:**

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{۴}{۳}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱} = ۱۰۸$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۷۶- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

A_0 ، A_1 و A_2 را به ترتیب مجموعهٔ اعضایی از A در نظر می‌گیریم که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌های ۰ ، ۱ و ۲ دارند. $A_0 = \{۳ , ۶ , ۹ , ۱۲\}$

$$A_1 = \{۱ , ۴ , ۷ , ۱۰\} \qquad A_2 = \{۲ , ۵ , ۸ , ۱۱\}$$

در دو حالت، جمع سه عدد انتخابی مضرب ۳ است.

حالت (۱): هر سه عدد از یکی از مجموعه‌های A_0 ، A_1 و A_2 انتخاب شوند:

$$۳\times\binom{۴}{۳}=۱۲$$

حالت (۲): از هر یکی از مجموعه‌های A_0 ، A_1 و A_2 یک عدد انتخاب شود:

$$\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۱}=۶۴$$

در نتیجه تعداد انتخاب‌های مورد نظر برابر است با:

$$۱۲+۶۴=۷۶$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

تابع $y=|f(x)|$ در ریشه‌های سادهٔ $f(x)$ مشتق‌ناپذیر است.

(حسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۳- **گزینهٔ «۴»** *(طاهر دادستانی)*

مساحت یک لوزی به طول ضلع ℓ که یکی از زوایای آن θ است، از رابطهٔ $S = \ell^۲ \sin\theta$ به دست می‌آید. پس در این سؤال داریم:

$$S(\alpha) = ۴\sin\alpha$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر همان مشتق تابع است:

$$S'(\alpha) = ۴\cos\alpha \Rightarrow S'(\frac{۲\pi}{۳}) = ۴\cos\frac{۲\pi}{۳} = -۲$$

(حسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۴- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا راسخ)*

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x+\frac{۱}{x})^۲ - ۲ + ۳}{x+\frac{۱}{x}} = x + \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x+\frac{۱}{x}}$$

پس اگر $h(x) = x + \frac{۱}{x}$ باشد، $f(x) = (hoh)(x)$ است و داریم:

$$f'(x) = h'(x)h'(h(x)) \xrightarrow{x=۲} f'(۲) = h'(۲)h'(h(۲))$$

$h(۲) = \frac{۵}{۲}$ است و داریم: $f'(۲) = h'(۲)h'(\frac{۵}{۲})$

مشتق تابع h نیز $h'(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲}$ است.

$$h'(۲) = \frac{۳}{۴} \quad , \quad h'(\frac{۵}{۲}) = \frac{۲۱}{۲۵} \Rightarrow f'(۲) = \frac{۶۳}{۱۰۰}$$

(حسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۵- **گزینهٔ «۲»** (مسعود برملا)

تابع $y=[۳x-۲]$ در $x=۲$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است، پس برای این که f در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، لازم است که $x=۲$ صفر مرتبهٔ دوم تابع $h(x)=ax+b\sqrt{۲x}+۲$ باشد؛ یعنی $h(۲)=h'(۲)=۰$ باشد.

$$h(۲)=۲a+۲b+۲=۰\Rightarrow a+b=-۱ \qquad (۱)$$

$$h'(x)=a+\frac{b}{\sqrt{۲x}}\xrightarrow{x=۲}h'(۲)=a+\frac{b}{۲}=۰ \qquad (۲)$$

از معادلات (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$a=۱\ ,\ \ b=-۲\Rightarrow a-۲b=۵$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۶- **گزینهٔ «۴»** *(حمید علیزاده)*

وقتی $x \to ۰$ حد مخرج برابر صفر است، بنابراین حد صورت نیز باید برابر صفر شود:

$$f(۱) = g(۱)$$

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$L = \lim_{x \to ۰} \frac{f(۱-x) - g(۱-x)}{x + x^۲}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{f(۱-x) - f(۱) - (g(۱-x) - g(۱))}{x + x^۲}$$

$$= (\lim_{x \to ۰} \frac{f(۱-x) - f(۱)}{x} - \lim_{x \to ۰} \frac{g(۱-x) - g(۱)}{x}) \lim_{x \to ۰} \frac{۱}{۱+x}$$

$$= -(f'(۱) - g'(۱)) = ۲ \Rightarrow f'(۱) - g'(۱) = -۲$$

حال از تابع $y = f(۲x) - g(۲x)$ مشتق می‌گیریم:

$$y' = ۲f'(۲x) - ۲g'(۲x) \xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} y' = ۲(f'(۱) - g'(۱)) = -۴$$

(حسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۰ و ۹۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۷- **گزینهٔ «۳»** *(سعید تن‌آرا)*

$$y = x^{\frac{۵}{۳}} - ۵x^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow y' = \frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} - \frac{۵}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}} = \frac{۵}{۳}\frac{\sqrt[۳]{x^۴} - ۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}$$

بدیهی است که تابع در $x = ۰$ مشتق‌ناپذیر است و از طرفی در $x = ۱$ دارای مشتق صفر است، پس $x = ۱$ تنها نقطهٔ بحرانی محدودهٔ xهای مثبت است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحهٔ ۱۱۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۸- **گزینهٔ «۲»** *(سعید تن‌آرا)*

$$f(-۲)=-\frac{۸}{۳} \quad , \quad f(۲)=\frac{۸}{۳}$$

نقاط بحرانی عضو بازهٔ $(۲\ ,\ -۲)$ را نیز پیدا می‌کنیم.

$$f'(x)=x^۳+x^۲-۲x \xrightarrow{f'(x)=۰} x(x+۲)(x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow x=۰\ ,\ -۲\ ,\ ۱$$

که $x=۰$ و $x=۱$ درون بازهٔ مورد نظر قرار دارد. مقادیر تابع در این دو نقطه را نیز حساب می‌کنیم:

$$f(۰)=۰ \quad , \quad f(۱)=-\frac{۵}{۱۲}$$

در نتیجه برد تابع بازهٔ $[\frac{۸}{۳}\ ,\ -\frac{۸}{۳}]$ است که طول این بازه برابر $\frac{۱۶}{۳}$ است.

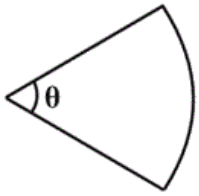
(حسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۱۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۹- **گزینهٔ «۲»** (محمدرضا راسخ)



محیط قطاع بالا برابر ℓ است. اگر شعاع دایره را r در نظر بگیریم، داریم:

$$P_{\text{قطاع}} = ۲r + r\theta = r(۲ + \theta) = \ell$$

از طرفی مساحت قطاع از رابطهٔ $S = \frac{۱}{۲}\theta r^۲$ به دست می‌آید.

$$S(r) = \frac{۱}{۲}(\frac{\ell}{r} - ۲)r^۲ = \frac{۱}{۲}\ell r - r^۲$$

در جواب معادلهٔ $S'(r) = ۰$، S بیشترین مقدار خود را دارد.

$$S'(r) = \frac{۱}{۲}\ell - ۲r \xrightarrow{S'(r)=۰} r = \frac{\ell}{۴}$$

$$\Rightarrow S_{max} = S(\frac{\ell}{۴}) = \frac{۱}{۱۶}\ell^۲$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۱۰- **گزینهٔ «۲»** (کاظم اجلالی)

ابتدا نقاط بحرانی تابع را در بازهٔ $(۰,\pi)$ به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۲\sin x\cos x-\sin x$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰}\sin x(۲\cos x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۰ : \text{در بازهٔ}(۰,\pi)\text{جواب ندارد}\\ \cos x=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{x\in(۰,\pi)}x=\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

پس $x=\frac{\pi}{۳}$ تنها نقطهٔ بحرانی تابع در بازهٔ $(۰,\pi)$ است. حال مقادیر تابع را

در این نقطه و هم‌چنین ابتدا و انتهای بازهٔ $[۰,\pi]$ به دست می‌آوریم:

$$f(۰)=m+۱, f(\frac{\pi}{۳})=\frac{۵}{۴}+m\ ,\ f(\pi)=-۱+m$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع در بازهٔ گفته شده برابر $\frac{۵}{۴}+m$ و مینیمم مطلق

آن $-۱+m$ است.

پس داریم:

$$\frac{۵}{۴}+m-۱+m=۲m+\frac{۱}{۴}=\frac{۱۳}{۴}\Rightarrow m=\frac{۳}{۲}$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۱۹)

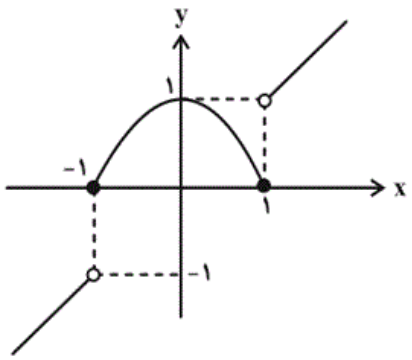
۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۲- **گزینهٔ «۳»** *(سعید تن‌آرا)*

بهتر است نمودار تابع را رسم کنیم:



با توجه به نمودار، تابع در $x=۰$ ماکزیمم نسبی و در $x=۱$ مینیمم نسبی دارد.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۳۱- **گزینهٔ «۱»** *(هومن عقیلی)*

$$\overset{\Delta}{ABC}\text{ محیط} = AB+AC+\underbrace{BC}_{۱۲} = ۳۲ \Rightarrow AB+AC = ۲۰$$

یعنی A روی یک بیضی به کانون‌های B و C حرکت می‌کند، به‌طوری که $۲a=۲۰$ و $۲c=۱۲$. یعنی $a=۱۰$ و $c=۶$؛ با توجه به این‌که $a^۲=b^۲+c^۲$، پس $b=۸$ و چون $AH>b$ یعنی $۸<۹$، در نتیجه با این شرایط مثلثی رسم نمی‌شود.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۳۲- **گزینهٔ «۴»** (هومن عقیلی)

طبق فرض داریم:

$$MF = x \Rightarrow MF' = ۳x$$

$\overset{\Delta}{MFF'}$ قضیه کسینوس‌ها در :

$$x^۲ + ۹x^۲ - ۲(x)(۳x)\underbrace{\cos ۶۰^\circ}_{\frac{۱}{۲}} = (۲\sqrt{۷})^۲$$

$$\Rightarrow ۷x^۲ = ۲۸ \Rightarrow x = ۲$$

$$\Rightarrow MF = ۲ \ , \quad MF' = ۶ \Rightarrow MF + MF' = ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$$

$$FF' = ۲c = ۲\sqrt{۷} \Rightarrow c = \sqrt{۷}$$

$$\Rightarrow \text{خروج از مرکز} : e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

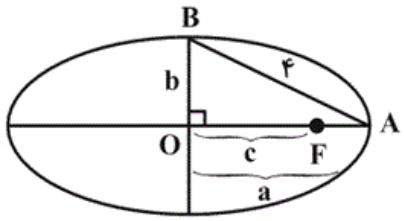
۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۳۳- **گزینهٔ «۳»** (هومن عقیلی)

طبق فرض و شکل داریم:



$$AF = a - c = ۱ \Rightarrow a = c + ۱$$

$$\overset{\Delta}{OAB} \text{ در } \begin{cases} a^۲ + b^۲ = ۱۶ \\ + \quad a^۲ = b^۲ + c^۲ \end{cases}$$

$$۲a^۲ = ۱۶ + c^۲$$

$$\Rightarrow ۲(c+۱)^۲ = ۱۶ + c^۲ \Rightarrow c^۲ + ۴c - ۱۴ = ۰$$

$$\Rightarrow c = \frac{-۲ \quad \sqrt{۱۸}}{۱} = ۳\sqrt{۲} - ۲ \Rightarrow FF' = ۲c = ۶\sqrt{۲} - ۴$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

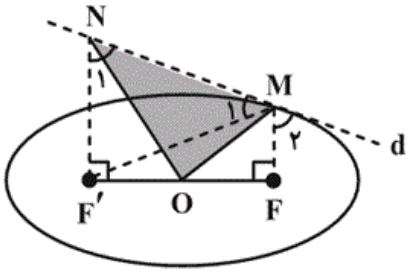
طول قطرهای بیضی $2a = 8$ و $2b = 2\sqrt{7}$ است، پس $2c = 6$. نقطهٔ M را به F' وصل می‌کنیم، با استفاده از ویژگی‌های خط مماس بر بیضی می‌دانیم:

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

همچنین به کمک قضیه موازی مورب داریم:

$$\hat{M}_2 = \hat{N}_1$$

$$\Rightarrow NF' = MF'$$



از طرفی نقطهٔ O وسط ساق ذوزنقه قائم‌الزاویهٔ $MFF'N$ قرار دارد. پس:

$$S_{OMN} = \frac{1}{2} S_{MFF'N} = \frac{1}{2}\left(\frac{(MF + NF').FF'}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(2a)(2c) = ac = 4 \times 3 = 12$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۳۵- **گزینهٔ «۳»** (مهرداد ملوندی)

داریم:

$$x^۲+y^۲-۲x=۲ \Rightarrow \text{مرکز دایره}: W(-\frac{a'}{۲},-\frac{b'}{۲})=(۱,۰)$$

$$(y+b)^۲=۲(x+a) \xrightarrow{\text{سهمی افقی}} \begin{cases} \text{رأس سهمی}: S(-a,-b) \\ ۴a''=۲ \Rightarrow a''=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دهانه به سمت راست}} \text{کانون سهمی}: F(-a+\frac{۱}{۲},-b)$$

طبق فرض، مرکز دایره بر کانون سهمی منطبق است:

$$(۱,۰)=(-a+\frac{۱}{۲},-b) \Rightarrow \begin{cases} -a+\frac{۱}{۲}=۱ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲} \\ -b=۰ \Rightarrow b=۰ \end{cases}$$

پس رأس سهمی به صورت $S(\frac{۱}{۲},۰)$ و معادلهٔ خط هادی برابر می‌شود با:

$$x=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}=۰$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۳۶- **گزینهٔ «۱»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

ابتدا معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$۲(y^۲+۲y)=x-k$$

$$۲((y+۱)^۲-۱)=x-k$$

$$(y+۱)^۲=\frac{۱}{۲}(x-k+۲)\Rightarrow\begin{cases}\text{رأس سهمی}: S(k-۲\ ,\ -۱)\\ ۴a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۸}\end{cases}$$

خط هادی در سهمی افقی : $x=\alpha-a\Rightarrow x=k-۲-\frac{۱}{۸}=-\frac{۱}{۸}$

$$\Rightarrow k=۲$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۶)

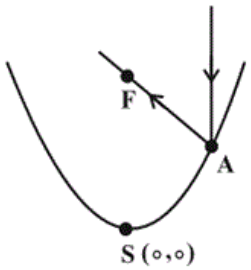
۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۳۷- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

چون پرتوی نور موازی محور سهمی است، پس پرتو بازتاب از کانون سهمی می‌گذرد.



$$x^2 = 4y \ , \quad a = 1 \Rightarrow F(0 , 1)$$

نقطهٔ برخورد: $\begin{cases} x^2 = 4y \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow 4 = 4y \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(2 , 1)$

معادلهٔ پرتو بازتاب گذرنده از دو نقطهٔ $A(2 , 1)$ و $F(0 , 1)$ به صورت $y = 1$ است که عرض از مبدأ آن $y = 1$ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

مختصات کانون این سهمی $F(1 , 0)$ است. پس نقطهٔ M پایین‌تر از کانون سهمی و پرتوهای نور خارج شده پس از بازتابش به صورت نور بالا هستند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۶ و ۵۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

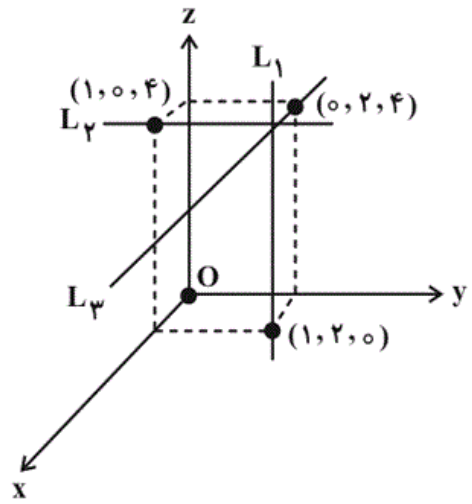
www.kanoon.ir

۳۹- **گزینهٔ «۱»** (مهرداد ملوندی)

چون خط گذرا از دو نقطهٔ A و B موازی یکی از محورهای دستگاه $\mathbb{R}^3$ است، پس دو مقدار از سه مقدار x، y و z در مختصات آن‌ها با هم برابر است. پس خط گذرا از این دو نقطه، یکی از سه خط زیر است:

$$L_1: \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x=1 \\ z=4 \end{cases} \qquad L_3: \begin{cases} y=2 \\ z=4 \end{cases}$$

فاصلهٔ مبدأ مختصات (نقطهٔ O) از سه خط L_1، L_2 و L_3 به ترتیب $\sqrt{5}$، $\sqrt{17}$ و $\sqrt{20}$ است و چون $\sqrt{5} < 3 < \sqrt{17} < \sqrt{20}$، پس نقطهٔ M روی خط L_1 قرار دارد و مختصات آن به صورت $M(1, 2, z)$ است و طبق فرض داریم:



$$OM = \sqrt{1^2 + 2^2 + z^2} = 3 \Rightarrow z = \pm 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_1 = (1, 2, 2) \Rightarrow 1+2+2 = 5 \\ M_2 = (1, 2, -2) \Rightarrow 1+2-2 = 1 \end{cases}$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۸)

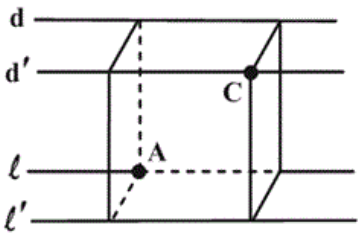
۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir

۴۰- **گزینهٔ «۴»** (مهریار راشدی)

یکی از قطرهای مکعب مستطیل، قطر AC است.



$$A(۱,۱,-۲) \quad , \quad C(۳,۴,۲)$$

$$AC=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۴-۱)^۲+(۲+۲)^۲}=\sqrt{۲۹}$$

خطوط d، d'، ℓ و ℓ' موازی با محور yها هستند.

$$d:\begin{cases}x=۱\\z=۲\end{cases} \qquad d':\begin{cases}x=۳\\z=۲\end{cases}$$

$$\ell:\begin{cases}x=۱\\z=-۲\end{cases} \qquad \ell':\begin{cases}x=۳\\z=-۲\end{cases}$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

www.kanoon.ir